101 學年度第二學期第一次定期考高三數學乙試題

一、多重選擇題(每題 7 分，共 4 題，佔 28 分)

說明：每題全對得 7 分，錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 1 分，其餘均得 0 分，答錯不倒扣。

1. 下列各選項之敘述何者正確？

(1) 數列$\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle$的極限不存在　　(2) 數列$\left\langle \dfrac{1+2n+3n^2}{4+5n^3} \right\rangle$收斂到$0$

(3) $0.\overline{9}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+4^n}{3^n}\right)=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0$

2. 已知函數$f(x)$滿足$f(2)=0$且$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$且$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$，下列各選項之敘述何者正確？

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=0$　　(3) $f(1)=0$

(4) $f(x)$在$x=1$處連續　　(5) $f(x)$在$x=2$處連續

3. 已知函數$f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$、$g(x)=\begin{cases} x & ,若x>0 \\ 0 & ,若x=0 \\ -x & ,若x<0 \end{cases}$、$h(x)=\begin{cases} |x| & ,若x\neq 0 \\ 1 & ,若x=0 \end{cases}$，下列各選項之敘述何者正確？

(1) $f(x)=|x|$　　(2) $f=g$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$不存在

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}h(x)$

4. 設多項式函數$f(x)=(x-1)(x-2)g(x)+5x-7$，其中$g(x)$為實係數多項式下列各選項之敘述何者正確？

(1) 一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a)=0$

(2) 一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a)=1$

(3) 一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a)=4$

(4) 一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a)=a$

(5) 一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a)=a^2$

二、填充題(每格 7 分，共 9 格，佔 63 分)

1. 已知函數$f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$與$g\left(x\right)=x^2-x$，求函數$\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right)$的定義域__________。

2. 設函數$f\left(x\right)=x^2-2x-3$的定義域為$\left\{x\middle|0\le x\le 3, x\in R\right\}$，求$f\left(x\right)$的值域__________。

3. 已知k為實數，且函數$f(x)=2x-3$、$g(x)=4x-10$、$h(x)=3x+3$，若$\left(g\circ f\right)(k)=h(k)$，求$k=$__________。

4. 設$f(x)$為a次實係數多項式函數，且其最高次項係數為b。已知數列$\left\langle\dfrac{f(n)}{2n^3-3}\right\rangle$的極限值為$2$，求數對$(a,b)=$________。

5. 求$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{[3-x]}{|x-3|}$之值為__________。(其中$[\ \ ]$為高斯符號)

6. 已知a,b均為實數，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+a)}{x^2+x+b}=2$，求數對$(a,b)=$__________。

7. 已知a,b均為實數，且$f(x)=\begin{cases}x+a & ,\text{若 } x>1\\ 5^x & ,\text{若 } x=1\\ x^2-2x+b & ,\text{若 } x<1\end{cases}$為連續函數，求數對$(a,b)=$__________。

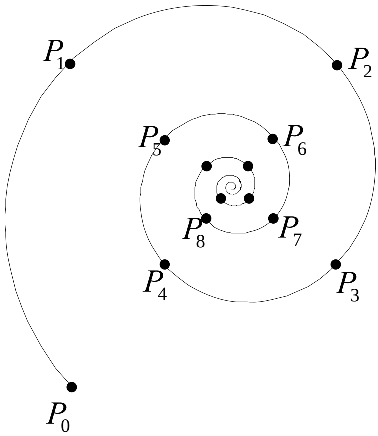
8. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-6}-\sqrt{n^2-5n+6}\right)$之值為__________。

9. 已知$\left\langle \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^n \right\rangle$為收斂數列，求實數 x 的範圍為____________。

三、計算題(佔 9 分)

說明：必須要有計算過程或完整說明，否則不予計分。

1. 如右圖所示，有一質點自 P_0 點以順時針螺旋狀的軌跡在平面上進行運動，依序通過 P_1、P_2、P_3、$\cdots$ 。當此質點到達點 P_1 時，剛好位於點 P_0 正北方 25 公尺處，



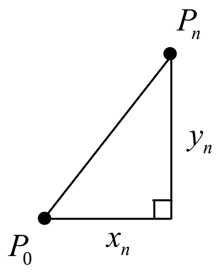
點 P_{4n-2} 剛好位於點 P_{4n-3} 正東方 $\dfrac{3}{4}\overline{P_{4n-4}P_{4n-3}}$ 處，

點 P_{4n-1} 剛好位於點 P_{4n-2} 正南方 $\dfrac{3}{4}\overline{P_{4n-3}P_{4n-2}}$ 處，

點 P_{4n} 剛好位於點 P_{4n-1} 正西方 $\dfrac{3}{4}\overline{P_{4n-2}P_{4n-1}}$ 處，

點 P_{4n+1} 剛好位於點 P_{4n} 正北方 $\dfrac{3}{4}\overline{P_{4n-1}P_{4n}}$ 處，其中 n 為任意正整數。

為方便了解此質點最終位置與點 P_0 的距離關係，我們定義點 P_n 在點 P_0 正東方 x_n 公尺、正北方 y_n 公尺處(如右圖所示)。



(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (3 分)

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (3 分)

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{P_0P_n}$ (3 分)