101 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

一、多重選擇題(10 分*5：每題全對得 10 分，錯一個選項得 8 分，錯兩個得 6 分，錯三個得 4 分，錯四個得 2 分，錯五個 0 分)

1. 已知$1080=2^3\cdot 3^3\cdot 5$，設宇集$S=\{x\in N \mid 1\le x\le 1080\}$，集合 $D=\{x\in N \mid x|1080\}$，集合$M_2=\{x \mid 2|x, x\in S\}$，集合 $M_3=\{x \mid 3|x, x\in S\}$，集合$M_5=\{x \mid 5|x, x\in S\}$，則下列那些是正確的？(設 a, b 為兩整數，則 $a|b$ 表示 a 為 b 的因數或 b 為 a 的倍數；$n(A)$表示集合 A 的元素個數)

   (1) $n(D)=(3+1)(3+1)(1+1)$

   (2) D 中所有元素的和為 $(2+2^2+2^3)(3+3^2+3^3)(5)$

   (3) $n(S-M_3)=1080(1-\frac{1}{3})$

   (4) $n(M_2\cup M_5)=1080(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})$

   (5) $n(M_2\cap M_3'\cap M_5')=1080(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$

2. 一個有 2013 項的等差數列,只要再單獨知道下列那個條件,就能確定其和？

   (1) 首項為 2013　(2)公差為 2013　(3)第 1007 項為 2013

   (4)所有偶數項的和為 2013　(5)最前面 1500 項及最後面 1500 項的和為 2013

3. 設$\langle a_n\rangle$為正實數所成的數列,其前 n 項的算術平均及幾何平均所成的數列分別為$\langle A_n\rangle,\langle G_n\rangle$，試問下列那些敘述是<u>正確</u>的？(註：n 個數的幾何平均為$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \quad \cdot a_n}$)

   (1)若$\langle a_n\rangle$為等差數列，則$\langle A_n\rangle$亦為等差數列

   (2)若$\langle a_n\rangle$為等比數列，則$\langle G_n\rangle$亦為等比數列

   (3)若$\langle A_n\rangle$為等差數列，則$\langle a_n\rangle$亦為等差數列

(4)若$\langle a_n \rangle$為公差不為 0 的等差數列，則所有的點(a_n, A_n)均在同一直線上

(5)若$\langle a_n \rangle$為等比數列，則所有的點(n, G_n)均在同一直線上。

4. 時間序列是一種以時間排序所得的一組數列，在經濟學、農業、地理水文、攝影學等領域都有應用。如圖，在錄影機螢幕的一條鉛直線上記錄每個時間點 n(時間間距為 24 分之 1 秒)被攝影物在螢幕上的高度h_n(公分)，則數列$\langle h_n \rangle$即是一種時間序列，可作為防手震程式的重要參考，今若數列$\langle h_n \rangle$的若干項如表，且數列的一般項h_n為 n 的多項式且次數低於 5 次，試問下列那些敘述是<u>正確</u>的？

n	1	2	3	4	5	6
h_n	2.5197	2.5111	2.5063	2.5059	2.5105	2.5207

(1)若數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_n = h_{n+1} - h_n$，則a_n亦為 n 的多項式且其次數可能比h_n的次數高

(2)h_n的次數不小於 2

(3)h_n的次數為 4

(4)h_n的領導係數為正

(5)$h_7 = 2.5361$

5. 有座號 1~n 的 n 個學生及編號 1~n 號的 n 頂帽子，今全部的學生各自找一頂帽子戴上，每個人都戴上一頂，沒有帽子剩下，假設沒有人戴到與自己座號相同的的帽子之方法有a_n種，試問下列那些敘述是<u>正確</u>的？

(1)若有 2013 個學生，考慮 1 號可選擇情形，則可知a_{2013}為 2012 的倍數

(2)若有 2013 個學生，若 1 號學生戴 2 號帽子，2 號戴 1 號，則沒有人戴與自己座號相同的帽子之方法有$a_{2011}+1$種

(3)若有 2013 個學生，若 1 號學生戴 2 號帽子，2 號不戴 1 號，則沒有人戴與自己座號相同的帽子之方法有 a_{2012} 種

(4) $a_{11}=10(a_9+a_8)$

(5) a_n 的前 6 項如右表

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	1	2	9	44	255

二、填充題(10 分*2)

1. 設 O$=P_0$為原點，$P_1(x_1,y_1)\sim P_n(x_n,y_n)$為$y=x^2$為圖形上異於 O 的 n 個點，其中 $P_1(1,1)$ 且對於 k=1,2,3,…,n-1，$\angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=90$，則 $\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)=$____________。(註：直線 y=mx+k 的斜率為 m；若兩條有斜率的直線互相垂直，則兩斜率相乘為−1)

2. 如圖，有一個長條形的電梯有唯一的出入口，寬度只容的下一個人，而且只有當所有人的體重和恰為 25 單位時，電梯才會啟動，若超重時，電梯會發出警告聲響，現在有六個人排成一列，體重依序為 7, 4, 2, 11, 16, 15 單位(大家互相不知其它人的體重)，大家依排隊順序進入，若某人進入後超重，則某人立刻退出，站回原來排隊的位置，並讓後面的人嘗試，或者若某人後面的人把所有的情形都嘗試過仍行不通，則某人必須退出，站回原來排隊的位置，並讓後面的人嘗試，則從一開始到電梯啟動，共有____________人次的進出。(進與出都算一次)(註：過程中，若有要退出時，後進先出；每一次可以進去的人都是依原來的排隊順序嘗試進入，例如：若體重 4 的人必須出來時，則出來後 2, 11, 16, 15 均可嘗試進入且仍依此排隊順序嘗試進入)

唯一的出入口 ←

742111615

三、證明題(1. (1) 8 分，(2)10 分；2. 12 分)

1. 正實數所成的數列$\langle x_n\rangle$滿足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{3}{x_n})$，且 $x_1=2$，

(1) 試證明：$x_n \geq \sqrt{3}$；

(2) 試利用數學歸納法證明：對於任意正整數 n，$\dfrac{x_{n+1}-\sqrt{3}}{x_{n+1}+\sqrt{3}} = (\dfrac{x_1-\sqrt{3}}{x_1+\sqrt{3}})^{2^n}$

2. 數列 $< a_n >$ 滿足下列兩個條件，

(1) 正整數 k，$a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ 為公差 d_k 的等差數列(其中 $d_k \neq 0$)，

(2) 正整數 k，$a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 為等比數列，試證：數列 $< d_k >$ 為等差數列

湯祥明，人稱湯哥，他是樂生的伯伯，建中的學長。

民國 40 年，湯哥就讀建中二年級，是位才華洋溢的青年，但由於當時資訊缺乏，在被檢出痲瘋病後，旋即強制帶往樂生療養院隔離。當年的樂生，滿佈鐵網圍籬，憲兵謹守，門禁森嚴，院民不得自由進出，51 年後雖漸漸開放，無奈人事全非。湯哥說：「他都不會再經過往建中的路、不會再到建中」。樂生綁住他和朋友超過 5o 個年頭，搗毀了他們的希望與夢想，那些逝去的，早成過眼雲煙。

而我天真的以為人類應該為歷史的錯誤謙卑地望向樂生，為曾經犯的錯誤誠心地彎腰懺悔。然而，有群人卻一再以「公共利益」為名，再次粗爆的踐踏蹂躪他們殘存過往的記憶，想毀棄這一草一木、一磚一瓦都與他們生命故事緊緊相連的家園，自以為不考慮他們內心感受的安置是種恩澤。

紅樓才子們，如果你願意，請你試著了解樂生，如果你願意，請和我們一起捍衛樂生。

最後，僅附上才子湯哥的一首詩與大家分享：

圓

我以希望為圓心 竟畫出段段失望的短弧 像支支利鏃直刺我心 我瘋狂的嘶喊著

向這灰色的世紀 我試畫一個理想的圓 把他密密圍住