

# 101 學年度第一學期第二次定期考高三自然組數學試題

一、多重選擇題：每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項。每題答對得 6 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 4 分，錯兩個可獲 2 分，錯三個或三個以上不給分。共 4 題。

1. 下列各函數何者週期為  $\pi$  ？

(1)  $y = \sin 2x + \cos 2x$

(2)  $y = |\sin x + \cos x|$

(3)  $y = |\sin x| + |\cos x|$

(4)  $y = \tan x + \cot x$

(5)  $y = \sec\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$

2. 試問下列選項何者是正確的？

(1)  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\sin 1 < \sin 2$

(3)  $-1 < \cos(\pi^2) < -\frac{1}{2}$

(4)  $\sin 4 < \cos 4$

(5)  $\tan 5 < \sin 5 < \sec 5$

3. 若  $y = f(x) = \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x + 1$ ，則下列選項何者是正確的？

(1)  $-1 \leq y \leq 3$

(2) 當  $x = -\frac{\pi}{9}$  時， $y$  有最大值

(3) 週期為  $\frac{\pi}{3}$

(4)  $f(1) > 2$

(5) 圖形對稱於直線  $x = \frac{5\pi}{9}$

4. 若  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且  $\theta \neq 0$ ，則下列選項何者正確？

(1)  $\cos \theta + 4 \sec \theta$  有最小值 4

(2)  $|\sin \theta| + |4 \csc \theta|$  有最小值 4

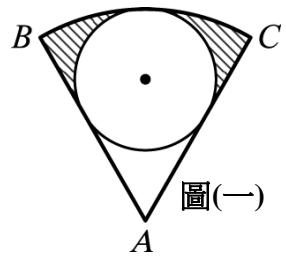
(3)  $\tan \theta + 4 \cot \theta$  有最小值 4

(4)  $\tan^2 \theta + 4 \cot^2 \theta$  有最小值 4

(5)  $\cos^2 \theta + 4 \sec^2 \theta$  有最小值 4

二、填充題：每格 7 分，共 9 格。

1. 如圖(一)，扇形的圓心角為  $\frac{\pi}{3}$ ， $\widehat{BC}$  弧長為  $10\pi$ ，則斜



線區域面積為 \_\_\_\_\_ (1) \_\_\_\_\_

2. 設  $-2\pi \leq x \leq 8\pi$ ，則方程式  $\sec x = -\frac{11}{10}$  的所有解之

和為 \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_

3. 設  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且  $x = \tan \theta$ ，滿足  $\sqrt{1+x^2} \cdot (1 + \frac{1}{x}) = 2\sqrt{2}$ ，求

$x =$  \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_ (兩解)

4. 已知矩形的邊平行坐標軸，且內接於橢圓  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，求滿足條件的矩形

的最大面積為 \_\_\_\_\_ (4) \_\_\_\_\_

5. 將  $y = \sin x$  之圖形，鉛直方向伸張為原來的3倍，水平方向壓縮為原來的  $\frac{1}{4}$  倍

，然後向左平移  $\frac{\pi}{6}$  單位，又再向下平移2單位，可得圖形方程式為

$y = a \sin(bx + c) + d$ ， $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $0 < c < 2\pi$ ，則求數對  $(a, b, c, d)$

\_\_\_\_\_ (5) \_\_\_\_\_

6. 設  $x$  為實數， $\frac{2 + \cos x}{2 + \sin x}$  的最大值為  $M$ ，且最小值為  $m$ ，試求  $M - m =$

\_\_\_\_\_ (6) \_\_\_\_\_

7. 設  $0 \leq x < 2\pi$ ， $f(x) = 12\sin x - 5\cos x$ ，當  $x = \alpha$  時， $f(x)$  有最大值，則

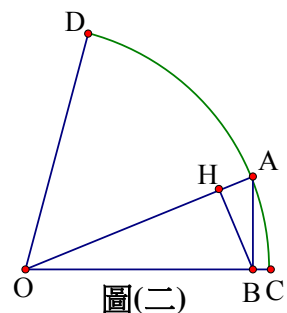
$\tan \alpha + \sec \alpha =$  \_\_\_\_\_ (7) \_\_\_\_\_

8. 如圖(二)，扇形之半徑為2， $\angle COD = 75^\circ$ ， $A$  為  $\widehat{CD}$

上動點，過  $A$  作  $\overline{AB} \perp \overline{OC}$  於  $B$  點，再過  $B$  作

$\overline{BH} \perp \overline{OA}$  於  $H$  點，設  $\angle AOC = \theta$ ，當  $\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{BH}$  有最大值  $M$  時，此時  $\theta = \theta_0$ ，求數對  $(\theta_0, M)$

\_\_\_\_\_ (8) \_\_\_\_\_ (3分,4分)



9. 已知點 $(\alpha, \beta)$ 經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 線性變換後，所得到的新點為 $(\alpha-2\beta, \beta)$ 。

設圓 $C: x^2 + y^2 = 4$  經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 線性變換後，所得到的新圖形為 $\Gamma$ ，則

$\Gamma$ 上的點與原點距離的最小值 = \_\_\_\_\_ (9) \_\_\_\_\_

三、計算題(共1題，共13分。必須寫出計算過程，否則不予計分。)

1. 設 $0 \leq x \leq \pi$ ， $y = 4\sin x - 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{6})$ ，當 $x = \alpha$ 時， $y$ 有最大值為 $M$ ；當 $x = \beta$ 時， $y$ 有最小值為 $m$ 。試：

(1)將 $y = 4\sin x - 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 化成 $y = a\sin(bx + \theta)$ ，其中 $a$ 、 $b$ 、 $\theta$ 皆為實

數，且 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $0 < \theta < 2\pi$ (5分)

(2)求 $\alpha = ?$  (2分)， $M = ?$  (2分)

(3)求 $\beta = ?$  (2分)， $m = ?$  (2分)