101 學年度第一學期第三次定期考高三自然組數學試題

一、填充題：（每格 6 分，共計 60 分）

1. 若 $-4-4\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $r>0$ 且 $0\le\theta<2\pi$，則數對 $(r,\theta) =$ __(1)__。

2. 若 $a\in R$，且 $\left|\dfrac{(1-i)^5}{(a+i)^4}\right| = \sqrt{2}$，則 $a =$ __(2)__。

3. $\dfrac{(\cos 70^\circ - i\sin 70^\circ)(-\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)^2}{(\sin 80^\circ + i\cos 80^\circ)^3} =$ __(3)__。(以 $a+bi$，$a,b\in R$ 型式作答)

4. 複數 z_1, z_2 在複數平面上所代表的點分別為 A, B，O 為原點，若 $\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=4$，$Arg(z_1) > Arg(z_2)$ 且 $\angle AOB = 60^\circ$，則 $\dfrac{z_2}{z_1} =$ __(4)__。

5. 設 $z_1 = 2+ai$，$z_2 = 2b+(2-b)i$，$a, b\in R$，若 $|z_1| = 2|z_2|$ 且 $Arg(\dfrac{z_2}{z_1}) = \dfrac{\pi}{2}$，則數對 $(a, b) =$ __(5)__。

6. 設 z 為複數，若 $|z+1-i| = 1$ 且 $|z-i| = |z-3i|$，則 $z =$ __(6)__。

7. 設函數 $f(x) = x^{10}$，則 $f(x)$ 除以 $x-(\sqrt{3}-i)$ 的餘式為 __(7)__。

8. $3-4i$ 的平方根為 __(8)__。

9. 設方程式 $z^6 = -4-4\sqrt{3}i$ 的六個根為 $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$，

   (1) 若 $z_k = r[\cos(\alpha + \dfrac{2k\pi}{6}) + i\sin(\alpha + \dfrac{2k\pi}{6})]$，$k = 0,1,2,3,4,5$，其中 $r>0$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，則數對 $(r,\alpha) =$ __(9)__。

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{5} |z_k - z_0|^2 =$ __(10)__。

二、填充題：（每格 5 分，共計 40 分）

1. 設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r>0$ 且 $0<\theta<\pi$ ，$w=(\sqrt{3}+i)z$ ，

(1) 若 z ,w 在複數平面上所對應的點分別為 P ,Q，且 $r=2$ ，O 為原點，則 ΔOPQ 的面積為 ___(1)___，

(2) 若 w 為純虛數，則 $\theta=$ ___(2)___。

2. 設 $w=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ ，試求下列各式之值

(1) $\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{w^2}+\dfrac{1}{w^3}+\dfrac{1}{w^4}+\dfrac{1}{w^5}+\dfrac{1}{w^6}=$ ___(3)___。

(2) $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)(1+w^5)(1+w^6)=$ ___(4)___。

3. 方程式 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的五個根在複數平面上所連成的多邊形面積為 ___(5)___。若其中一根為 $a+bi$，$a<0$, $b>0$ ，則數對 $(a,b)=$ ___(6)___。

4. 設 $x+\dfrac{1}{x}=1$ ，則 $\displaystyle\sum_{n=1}^{15}(x^n+\frac{1}{x^n})=$ ___(7)___。

5. 設 z 為複數且 $z^8=16i$ ，則 $|z+2|^2+|z-2|^2=$ ___(8)___。