

101 學年度第一學期第二次定期考高一數學試題

一、單一選擇題（共 15 分。每題只有一個是正確或最適當的選項，答對者得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。）

1. 設 a, b, c 表非直角三角形之三角形的三邊長，試判別

$x^2 + 4abx + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 之根的性質為何？

(A) 兩相異正根 (B) 兩相異負根 (C) 兩相等正根 (D) 兩相等負根 (E)

兩共軛複根

2. 設 a, b 為複數，試問下列哪一個選項是正確的？

(A) 若 $a^2 > b^2$ ，則 $a^2 - b^2 > 0$ (B) 若 $a^2 - b^2 > 0$ ，則 $a^2 > b^2$

(C) 若 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$ (D) 若 $\frac{a}{b} > 1$ ，則 $a > b$

(E) 若 $a^2 > b^2$ ，則 $\frac{a^2}{b^2} > 1$

3. 已知實係數四次多項式函數 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ，若 $f(x)$ 值之正負如下表，且 $f(2i - 3) = 0$ ，則下列哪一個選項是正確的？

x	小於 -4	-3	-2	-1	0
$f(x)$ 值	+	+	+	+	-

(A) -3, -2 之間有實根 (B) -1, 0 之間恰有兩實根

(C) $f(x) = 0$ 有四個實根 (D) $f(x) = 0$ 恰有一正根

(E) $2i + 3$ 為 $f(x) = 0$ 的根

二、多重選擇題（共 5 分。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 5 分；答錯 1 個選項者得 3 分；答錯 2 個選項者得 1 分；答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。）

1. 設 a, b, c 皆為不等於 1 的正實數， $i = \sqrt{-1}$ ，下列哪些選項化簡後的值等於 1？

(A) $(\sqrt[520]{\pi} \cdot \sqrt[168]{88})^0$ (B) $2^{a-b} \cdot 2^{b-c} \cdot 2^{c-a}$ (C) $(-1)^{\frac{2}{4}}$

$$(D) i^{2012}$$

$$(E) \frac{a\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt[15]{a^8}}$$

三、填充題(共 60 分。每題完全答對給 5 分，未完全答對者該題以零分計算。)

1. 設實係數四次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $12x-5$ ，而 $f(x)$ 除以 $(x+2)^2$ 的餘式為 $-18x-20$ ，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2(x+2)$ 的餘式為 ax^2+bx+c ，其中 a, b, c 皆為實數，則數組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設多項式
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x + 19 = a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x+1) + e$$
，其中 a, b, c, d, e 皆為實數，則數組 $(a, b, c, d, e) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 設 $(x^2 - x + 2)^6 = a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + \cdots + a_1x + a_0$ ，則 $a_{12} - a_{10} + a_8 - a_6 + a_4 - a_2$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 求 x^{200} 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 求實係數方程式 $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ 之解 x 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，求複係數方程式 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0$ 之解 z 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 設 x, y 為實數， $i = \sqrt{-1}$ ，且滿足 $x + y - i = 4 + xyi$ ，則 $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 已知不等式 $ax^2 - x + b < 0$ 之解為 $x > -3 + \sqrt{2}$ 或 $x < -3 - \sqrt{2}$ ，求不等式 $x^2 - ax + b < 0$ 的解範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 不等式 $x^4 - 499x^3 - 2013x^2 + 499x + 2012 < 0$ 的解範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 設 $f(x) = \frac{ax^2 + 6x + b}{x^2 + 1}$ ， x 為實數，若 $-8 \leq f(x) \leq -2$ ，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 已知 x, y, z 皆為非零實數，若 $9^x = 125^y = 45^z$ 且 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{z}$ ，求 a 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 化簡 $\frac{7^{\frac{1}{7}}}{7^{\frac{1}{7}} + \sqrt{7}} + \frac{7^{\frac{2}{7}}}{7^{\frac{2}{7}} + \sqrt{7}} + \frac{7^{\frac{3}{7}}}{7^{\frac{3}{7}} + \sqrt{7}} + \frac{7^{\frac{4}{7}}}{7^{\frac{4}{7}} + \sqrt{7}} + \frac{7^{\frac{5}{7}}}{7^{\frac{5}{7}} + \sqrt{7}} + \frac{7^{\frac{6}{7}}}{7^{\frac{6}{7}} + \sqrt{7}}$ 之值

為_____。

四、計算題（共 20 分，每題配分如下，請在答案卷上標明小題題號(1)、(2)，同時必須寫出演算過程，否則將予扣分。）

1. 求 $(9^{x+1} + 9^{-x+1}) - 16 \cdot (3^{x+1} + 3^{-x+1}) + 78 = 0$ 的所有可能解。(6 分)

2. 已知實係數多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + x^2 + 15x - 14$ 有一根 $2 + \sqrt{3}i$ ，求：

(1) 數對 (a, b) 。(6 分) (2) 所有根。(8 分)