

## 101 學年度第一學期第一次定期考高一數學試題

一、選擇題：共 5 題，每題 6 分，合計 30 分（說明：每題至少有一個選項是正確的，每個選項答對得 1.5 分，答錯不倒扣；整題未作答者，不給分亦不扣分。）

1. 下列哪些敘述是正確的？

(A)  $\frac{147}{1050}$  可以化為有限小數

(B)  $0.2\overline{34} = \frac{116}{495}$

(C) 若  $a^3, a^7$  皆為有理數，則  $a$  為有理數

(D) 若  $a$  是無理數，且  $(a+1)(a+3)$  是有理數，則  $(a-1)(a-3)$  是無理數

2. 下列哪些敘述是正確的？

(A)  $\sqrt{11} - \sqrt{5} > \sqrt{13} - \sqrt{7}$

(B) 設  $a, b$  皆為實數，若  $a < b$ ，則  $a < \frac{a+2b}{3} < b < \frac{7b-3a}{4}$

(C)  $|x-2| + |x+1| < 3$  無實數解

(D) 若  $x, y$  為相異正實數，則  $\frac{2xy}{x+y} > \sqrt{xy}$

3. 設  $x, y$  皆為實數，滿足  $|x-1| \leq 2, |2y-7| \leq 5$ ，則下列哪些敘述是正確的？

(A)  $-1 \leq 3x+2 \leq 11$

(B)  $-1 \leq xy \leq 18$

(C)  $1 \leq x^2 \leq 9$

(D)  $-5 \leq 3xy - 3x + 2y - 2 \leq 55$

4. 設  $f(x) = ax + b$  為一次函數，其中  $a < 0$  且  $b$  為實數，若函數  $y = f(x)$  的圖形經過點  $P(-3, 8)$ ，並分別與  $x, y$  軸交於  $A, B$  兩點，且  $\overline{PB} : \overline{PA} = 1 : 2$ ，則下列關於  $y = f(x)$  的函數圖形之敘述哪些是正確的？

(A) 為一由左下向右上傾斜之直線

(B) 每當  $x$  增加 3 單位時，其相對應的函數值減少 4 單位

(C) 與  $x$  軸交於點  $A(4,0)$

(D) 通過點  $(6,-4)$

5. 對於所有的實數  $x$ ，若函數  $f(x)$  滿足  $f(-x) = -f(x)$ ，就稱函數  $f(x)$  為奇函數。設  $a, b$  皆為實數，若已知三次函數  $f(x) = 4x^3 + (a+1)x^2 + (b-2)$  為奇函數，且  $y = f(x)$  的函數圖形通過點  $(p, q)$ ，其中  $p \neq 0$  且  $q \neq 0$ ，則下列哪些敘述是正確的？

(A)  $ab = -2$

(B)  $y = f(-x)$  的函數圖形與  $y = f(x)$  的函數圖形互相對稱於  $y$  軸

(C)  $y = f(x) + 2$  的函數圖形必定通過點  $(-p, -q + 2)$

(D)  $y = 4x^3 - 4x$  的函數圖形可由  $y = f(x)$  的函數圖形平移而得

## 二、填充題：共 8 題，每題 6 分，合計 48 分

1. 設  $x, y$  為有理數且  $2x \cdot (1 + 3\sqrt{2}) - y \cdot (3 + 2\sqrt{2}) - 7 = 0$ ，則  $x + y$  之值為 (1)。
2. 設  $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ ，則  $a^3 - \frac{1}{a^3}$  之值為 (2)。
3. 設坐標平面上有相異四點  $A(-5,1), B(3,1), C(x,1), D(5,3)$ ，若已知  $\triangle ABD$  的面積與  $\triangle BCD$  的面積比為  $2:3$ ，則實數  $x$  之值為 (3)。(兩解)
4. 設  $a, b$  為實數，若  $|ax + 3| \leq b$  之解為  $-2 \leq x \leq 5$ ，則數對  $(a, b) =$  (4)。
5. 方程式  $|x + 4| + |2x - 3| = 10$  的所有實數解  $x$  為 (5)。(兩解)
6. 設  $a, b$  為實數，若將二次函數  $y = -3x^2 - 12x - 8$  的圖形向右平移 3 單位，再向上平移  $b$  單位，得二次函數  $y = -3x^2 + ax + 12$ ，則數對  $(a, b) =$  (6)。
7. 設  $m$  為實數，若二次函數  $y = mx^2 - 2x + 5$  的圖形恆在  $y = 2x + 3$  圖形的上方，則  $m$  之範圍為 (7)。
8. 設  $x$  為實數，函數  $f(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 2) + 2x^2 - 4x + 7$  的最小值為 (8)。

三、計算題：共2題，每題11分，合計22分

1. 若已知一開口向上的拋物線  $y = ax^2 + bx + c$ ，其圖形與  $x$  軸分別交於  $A(-1,0), B(t,0)$  兩點，與  $y$  軸交於  $C$  點，且經過點  $D(1,-2)$ ，設  $A, B, C$  三點所圍成的  $\triangle ABC$  其面積為  $S$ ，試回答下列問題：

(1) 證明： $t = 1 + \frac{1}{a}$ 。(4分)

(2) 證明： $S = \frac{3}{2} + a + \frac{1}{2a}$ 。(4分)

(3) 求  $S$  的最小值。(3分)

2. (1) 設  $k$  為實數，試作二次函數  $f(x) = x^2 - 4|x+1| - 1$  的圖形。(請寫出詳細討論過程，並標出圖形之頂點坐標，及其與  $x, y$  軸交點之坐標) (8分)

(2) 承本題第(1)題，若方程式  $x^2 - 4|x+1| - 1 = k$  有四個相異實根，求實數  $k$  的範圍。(3分)