

六、函數

6-1

【類題練習 1】 (1) $f(0)=1, f(-\frac{2}{5})=1\frac{1}{5}$ (2) $f(5)=49$

【類題練習 2】 (1) $-4, 5$ (2) $5, -2, 1$

【想想看】 不是，因為只知道天數，並不能確定月份，例如：一年中每月 30 天的月份就有 4, 6, 9, 11 這四個月。

【家庭作業】

1. B

2. C

3. $f(2) = 17$

4. $f(5) = 3$

5. $34, -5$

6. $-12, 2, -31$

7. 因為分母 $x-2$ 不能為 0, 所以 $x=2$ 時, 沒有對應的函數值.

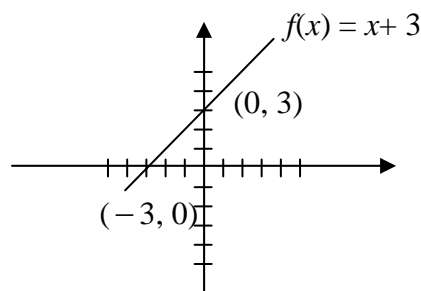
8. ① $f(1)+f(5)-f(9)=1+5-2=4$

② $(1+4+2+8+5+7)\times 3+1+4=86$

6-2

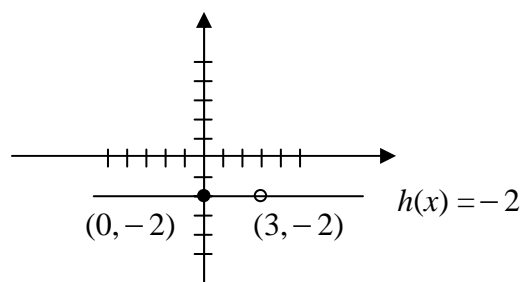
【類題練習 1】

x	-3	0
y	0	3



【類題練習 2】

x	0	3
y	-2	-2



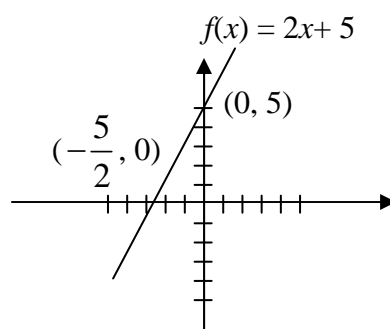
【家庭作業】

1. B

2. D

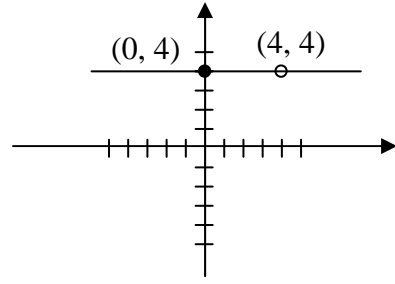
3.

x	$-\frac{5}{2}$	0
y	0	5



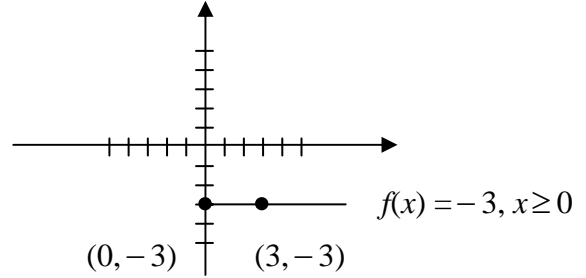
4.

x	0	4
y	4	4



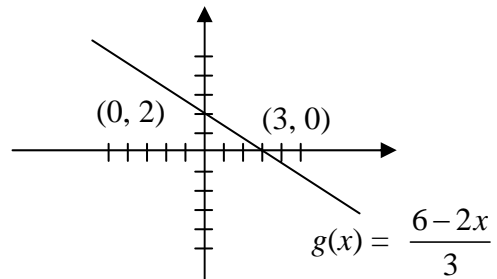
5.

x	0	3
y	-3	-3



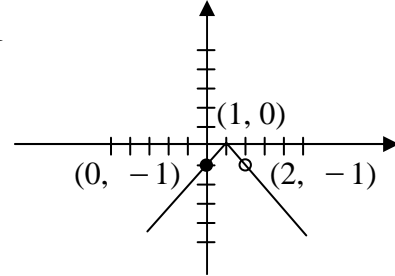
6.

x	0	3
y	2	0



$$7. y = -|x-1| = \begin{cases} -x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	-1	0	-1



8. ① $y = 20 - \frac{3}{500}x$

② $x = 3000 \Rightarrow y = 20 - \frac{3}{500} \times 3000 = 2$ (°C)

9. ① $f(x) = 20 - \frac{1}{15}x$

② $f(6) = 20 - \frac{1}{15} \times 6 = 19\frac{3}{5}$ (公分)

$f(8) = 20 - \frac{1}{15} \times 8 = 19\frac{7}{15}$ (公分)

③ $f(301) = 20 - \frac{1}{15} \times 301 < 0$

蠟燭燃燒 300 分鐘後,長度剩下 0;

所以不可能燃燒 301 分鐘, 因此 $f(301)$ 無解..

6-3

【類題練習 1】 (1) $(-1, 3)$ (2) $(1, -2)$

【類題練習 2】

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

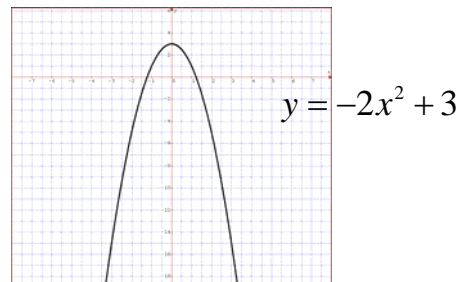
$$y = 2x^2$$

【類題練習 3】 開口由大至小依序為： $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$ 的圖形

【類題練習 4】 下, 2

【類題練習 5】

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	-5	1	3	1	-5	-15



【類題練習 6】

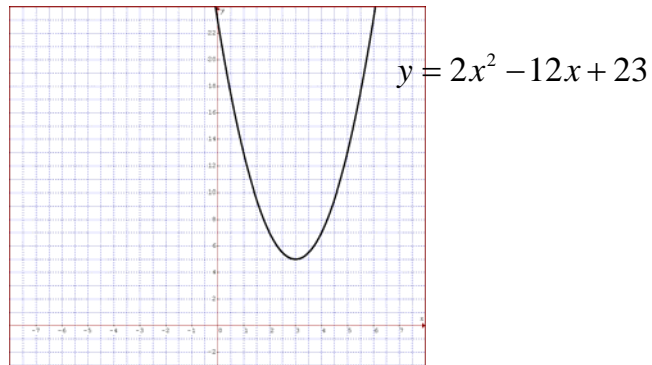
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4	9

$$y = (x+1)^2$$

【類題練習 7】 (1) 右, 2 (2) 左, 3

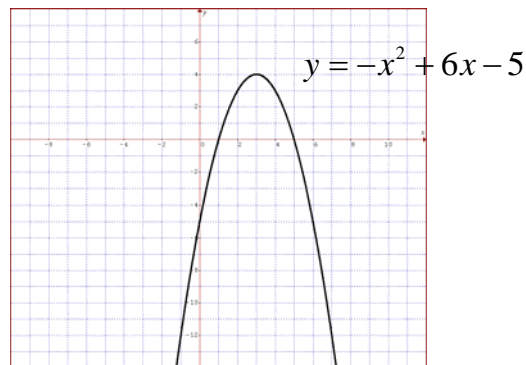
【類題練習 8】 $y = 2x^2 - 12x + 23 = 2(x^2 - 6x + 3^2) + 23 - 18$
 $= 2(x - 3)^2 + 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	23	13	7	5	7	13	23



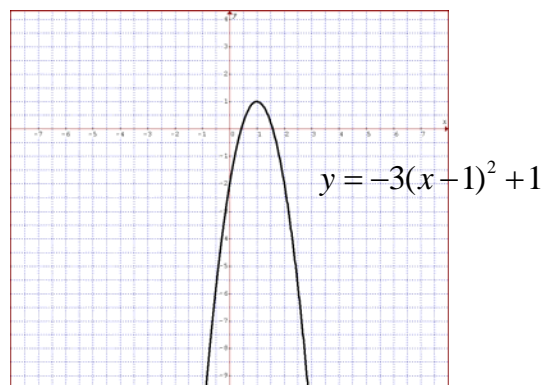
【類題練習 9】 $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x^2 - 6x + 3^2) - 5 + 9$
 $= -(x - 3)^2 + 4$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-5	0	3	4	3	0	-5



【家庭作業】 1.

x	-1	0	1	2	3
y	-11	-2	1	-2	-11



2. $y = -2x^2 - 4x = -2(x+1)^2 + 2$, 頂點: $(-1, 2)$,
對稱軸: $x+1=0$
3. $y = 5x^2 - 10x + 2 = 5(x-1)^2 - 3$, 頂點: $(1, -3)$,
對稱軸: $x-1=0$
4. 沿鉛直方向向下移動 3 個單位長後, 圖形可與 x 軸相切表示
新圖形頂點在 x 軸上, 亦即 y 坐標為 0.
原函數式 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 的圖形頂點為 $(1, 3)$, 所以沿鉛
直方向向下移動 3 個單位長, 圖形可與 x 軸相切.
5. 將 $y = -3(x-2)^2 + 1$ 的圖形沿水平方向向右移動 3 個單位長,
並沿鉛直方向向下移動 2 個單位長, 新的頂點坐標為
 $(5, -1)$, 所以新的函數式為 $y = -3(x-5)^2 - 1$.
6. 固定函數 $y = -2x^2 + 6x - 3 = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}$ 的圖形頂點, 將
圖形旋轉 180° , 只改變圖形的開口方向, 所以, 所得的新函
數為 $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}$.

6-4

- 【類題練習 1】** 圍成邊長為 50 公尺的正方形, 面積為最大, 其面積為 2500 平方公尺.
- 【類題練習 2】** (1) 將 20 分成 10, 10 兩數, 其平方和最小.
(2) 將 20 分成 10, 10 兩數, 其乘積最大.
- 【類題練習 3】** (1) 不恆為正, 也不恆為負. (2) 恆為負.
- 【類題練習 4】** $x = -5$ 時, 函數有最大值 48; $x = 1$ 時, 函數有最小值 0.
- 【家庭作業】**
1. 圍成邊長為 75 公尺的正方形面積為最大, 其面積為 5625 平方公尺.
 2. 將 30 分成 15, 15 兩數, 其平方和最小.
 3. 將 30 分成 15, 15 兩數, 其乘積最大.
 4. 時間為 $1/2$ 秒時, 達到最高點, 其高度為 40.5 呎.
 5. $x = 5$ 時, 函數有最大值 36; $x = 2$ 時, 函數有最小值 6.
 6. 因為 $y = -x^2 + x + m$ 的最大值為 $\frac{7}{4}$,

$$\text{所以, } y = -x^2 + x + m = y = -\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + m + \frac{1}{4}$$

$$\text{的最大值爲 } m + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}. \text{ 因此 } m = \frac{3}{2}.$$

7. 因爲，當 $x=3$ 時， $f(x)$ 的最小值爲 -2 ，

所以 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的頂點爲 $(3, -2)$ 。

因此可設函數式爲 $f(x) = a(x-3)^2 - 2$ 。

又圖形通過 $(0, 1)$ ，所以 $1 = a(0-3)^2 - 2$ ，

$$\text{得 } a = \frac{1}{3}, \text{ 代入 } f(x) = a(x-3)^2 - 2 = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 2$$

$$= f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1.$$

比較係數，得 $b = -2$ ， $c = 1$ ，所以 $a + b - c = -\frac{8}{3}$ 。

$$8. \quad x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z + 13$$

$$= x^2 - 6x + 2(y^2 + 2y) + z^2 - 10z + 13$$

$$= x^2 - 6x + 3^2 + 2(y^2 + 2y + 1^2) + z^2 - 10z + 5^2 + 13 - 36$$

$$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 + (z-5)^2 - 23 \geq -23$$

所以最小值爲 -23 。

$$9. (1) \quad y = 2|x-2|^2 + |x-8|^2 = 2(x-2)^2 + (x-8)^2$$

$$= 3x^2 - 24x + 72$$

$$(2) \quad y = 3(x-4)^2 + 24$$

$$(3) \quad 24$$