

## 四、一元二次方程式

### 4-1

【類題練習 1】  $x = -1/3$  或  $-3$

【類題練習 2】 (1)  $x = (3 \pm \sqrt{13})/2$  (2)  $x = (3 \pm \sqrt{41})/8$

【類題練習 3】 (1)  $x = (3 \pm \sqrt{13})/2$  (2)  $x = (3 \pm \sqrt{41})/8$

【類題練習 4】  $x = (3 \pm \sqrt{3})/3$

【類題練習 5】  $x = (1 \pm \sqrt{10})/3, -1/2$  或  $2$

【家庭作業】

1. ①  $x = 2/3$  或  $-3$       ②  $x = 6$  或  $2$   
③  $x = 3 \pm \sqrt{6}$       ④  $x = (-5 \pm \sqrt{5})/2$
2. ①  $p = -1, q = -24$       ②  $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$
3. 將  $x = -\frac{1}{2}$  代入  $\Rightarrow a(-\frac{1}{2})^2 + 3(-\frac{1}{2}) - a = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} - a = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \text{ 或 } 2$$

所以另一根為  $2$ .

4. 令  $x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = -1+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow 2x+1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

比較係數得  $c = -1$

5. ①  $\frac{x+5}{7} = \frac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow (x+5)(x-1) = 7$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ \Rightarrow (x+6)(x-2) &= 0 \\ \Rightarrow x &= -6 \text{ 或 } 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad x + \frac{2}{x-2} &= 5 \\ \Rightarrow x(x-2) + 2 &= 5(x-2) \\ \Rightarrow x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-4) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 3 \text{ 或 } 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \\ \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \\ \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{-1}{(x-3)(x-4)} \\ \Rightarrow (x-1)(x-2) &= (x-3)(x-4) \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 7x + 12 \\ \Rightarrow 4x &= 10 \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \\ \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= (-4)^2 - 4 = 12 \\ \Rightarrow x - \frac{1}{x} &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

7. 設先買進  $x$  公斤，再依題意列式

$$\begin{aligned} \left(\frac{6000}{x} + 10\right)(x-30) &= 8100 \\ \Rightarrow 6000 + 10x - \frac{18000}{x} - 300 &= 8100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 10x - \frac{18000}{x} - 2400 = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 18000 - 2400x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 240x - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 300)(x + 60) = 0$$

$$\Rightarrow x = 300 \text{ 或 } -60 (\text{不合})$$

Ans：原先買進芒果 300 公斤

#### 4-2

【類題練習 1】 (1) 2 個相異實根 (2) 無實根 (3) 無實根

【類題練習 2】 4

【家庭作業】 1. ① 2 個相異實根 ② 無實根 ③ 二重根  
④ 無實根 ⑤ 無實根 ⑥ 無實根

2.  $x^2 + 2ax + a = 1 \Rightarrow x^2 + 2ax + a - 1 = 0$

$$\text{判別式 } D = (2a)^2 - 4(a - 1) = 4a^2 - 4a + 4 = (2a - 1)^2 + 3 > 0$$

所以方程式有 2 個相異實根.

3.  $(m^2 + n^2)x^2 + 2(m + n)x + 2 = 0$

$$\text{判別式 } D = [2(m + n)]^2 - 8(m^2 + n^2)$$

$$= -4m^2 + 8mn - 4n^2 = -4(m - n)^2 < 0$$

所以方程式無實根.

4. 因為方程式  $3x^2 + 4x + 2(k - 1) = 0$  有實根,

所以判別式  $D \geq 0$ .

$$\Rightarrow D = 4^2 - 24(k - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 16 - 24k + 24 \geq 0$$

$$\Rightarrow -24k \geq -40$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{5}{3}$$

所以  $k$  最大為 1.

5. 因為方程式  $3x^2 + (k - 24)x + k = 0$  有一個二重根,

所以判別式  $D = 0$ .

$$\Rightarrow D = (k - 24)^2 - 12k = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 60k + 576 \geq 0$$

$$\Rightarrow (k - 48)(k - 12) = 0$$

$$\Rightarrow k = 48 \text{ 或 } 12$$

6. 從判別式觀察  $D = b^2 - 4ac$

由於  $ac < 0$ ，所以  $b^2 - 4ac$  恆大於 0

故方程式必有兩個相異實根