

九年一貫數學學習領域
銜接高中課程教材

95 暨 96 學年度銜接教學說明

執行單位：國立中正大學數學系

指導單位：教育部中等教育司
中華民國數學會

中華民國九十五年三月三十日

壹、計畫源起

歷經多次課程標準的修訂後，我國曾於民國 82、83 年陸續修訂國小、國中數學課程標準，復於 85、86 學年度分別實施國小、國中數學新課程，而九年一貫的數學課程則於 90 學年度國小一年級開始實施，再於 91 學年度自一、二、四、七年級開始全面實施。上述課程實施以來，不斷引起社會各界激烈的爭議與批評，持續反應對學生數學能力逐漸低落的憂慮。91 學年度第一學期國一新生第一次段考的成績表現，更全面引發社會輿論的關切與檢討，且憂慮無法銜接高中職或五專數學課程的問題，進而會影響高等及技職教育的人才培育成效，而造成國家整體競爭力下滑的不良影響。

除公布【樂在數學參考手冊】來順應輿論對提昇國小學生計算能力的呼籲外，教育部亦接受專家學者的意見於 92.01.29 召開數學小組諮詢會議，針對九年一貫數學課程的影響與改進進行討論。會中對該課程應儘速修訂的意見獲得高度共識，亦對數學發展的前瞻性規劃、九年一貫數學領域暫行綱要（簡稱國中暫行綱要）的修正以及教科書的審查等配套制度設計與措施完成初步規劃，其中數學領域綱要修訂小組（簡稱該小組）已於該年四月底提出「數學學習領域綱要修訂草案」，並建議於 94 學年度起自國中、小一年級逐年實施新課程。該小組參酌公聽會、網站及各界回饋意見，數次調整「數學學習領域綱要修訂草案」後送交審查，教育部並於 92.11.14 正式發布為九十四學年度實施之數學學習領域新綱要。

經該小組針對暫行綱要能力指標及通過審查或審查中教科書的內涵所進行的分析顯示，若繼續沿用現行九年一貫暫行綱要數學課程教材及授課時數勢必將造成與現行高中數學課程基本能力要求之間的嚴重落差。若未能及早修正，不僅影響高中數學課程的教學效果，更將影響高等教育的人才培育的實施成效，進而影響我國國際競爭力的發展。再者，高中課程暫行綱要（簡稱高中暫行綱要）將延至 95 學年度實施，所以，暫行綱要的高中新課程實施時程顯然無法對學習九年一貫暫行綱要課程的 94 學年度高一學生，有立即的助益，因此銜接教學的實施有其急迫性。

該小組建議儘快對修習暫行綱要數學課程的學生進行全面性補強教學，並獲得教育部明快的回應，其中國小部分已於 92 學年度起自小六逐年延伸至小四進行補強。然而，因涉及國中基本學力測驗，國中階段銜接補強工作僅能於 94 學年度起對當年度高中入學新生進行。雖然 95 學年度實施高中新課程，但是 95、96 學年度入學的高一學生亦是學習九年一貫暫行綱要課程，仍有銜接的需要。

教育部中教司於 92.12.25「研商九年一貫課程銜接高中課程」會議中決議委託中華民國數學會進行研擬補強教材製作事宜，復經中華民國數學會 93.01.17 理監事聯席會議討論，決議接受委託並指定中正大學數學系教授王慶安籌組專案小組研擬補強教材。中教司復於 93.02.16 召開會議討論本計畫推動重點。由於教育部綱要修訂小組已經於 92 年中展開暫行綱要的修訂工作，研判各家出版廠商也將隨即順應修改方向進行調整，因此決議採二階段方式進行銜接教學：

- (一) 94 學年度第一、二學期採每週增加一節課方式對高一學生進行銜接教學。
- (二) 95、96 學年度採插入式方式對高一學生進行銜接教學。

本計畫專案小組(簡稱本小組)參與成員尚有：協同主持人中正大學數學系褚孫錦教授、國立彰化高中陳永和老師、國立員林農工陳香妘主任、彰化縣陽明國中謝惠珠、彰化縣溪湖國中洪瑞鴻主任和嘉義市玉山國中林鴻哲老師。

本計畫另成立「銜接教學諮詢委員會」(以下簡稱諮詢委員會)，由吳鳳技術學院鄭國順校長、台灣大學數學系李白飛教授分別擔任正、副召集人，並邀請台灣大學數學系張海潮教授(退休)、台灣大學數學系陳宜良教授、清華大學數學系于靖教授、台灣師範大學數學系李恭晴教授、國立新竹中學張瑞欽校長、桃園縣大華中學黃家德校長、台北市麗山高中林永發主任、高雄市新莊高中林清波主任和國立豐原高中陳永昌老師參與，提供本計畫執行的諮詢意見及銜接教材的審查意見。

有關對 94 學年度高一新生部分，本小組已針對國中暫綱數學學習領域課程與高級中學 84 年課程標準間之落差問題進行補強舉措的研究，並製作銜接教材，提供各高中對該學年度入學新生進行數學領域銜接教學。94 學年度銜接教材中，計有「乘法公式與多項式」、「因式分解」、「平方根與立方根」、「一元二次方程式」、「線型函數與二次函數」、「不等式」和「數列與級數」等七個單元，並在附錄中列出「集合的概念」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」三個單元，來協助同學們順利銜接高中課程的學習。教育部除提供銜接教材外，並要求各校高一每週增加一節課，且補助每學期每班 18 節鐘點費，做為銜接教學之用。

有關對 95、96 學年度高一新生部分，本計畫小組針對高級中學 85 年課程標準與高中課程暫行綱要內容，以及九年一貫暫行綱要課本內容進行比較，來研擬插入式銜接教材的內容及教學方式。經審視目前國中二、三年級數學教科書內容，本小組發現各版本教科書僅因應九年一貫正式綱要內涵進行微幅調整，也就是說，95、96 學年度高一新生在國中階段所學習的數學課程內容與 94 學年度高一新生幾乎相同。再者，高中暫行綱要數學課程雖以銜接九年一貫為修訂理念，然考量國際上中等學校數學教育現況，以及銜接大學、技職教育的需求，高中暫綱一、二年級課程內容與 85 年課程標準之間並無重大的差異。因此，95、96 學年度國中畢業生所面臨銜接高中數學課程的困難，與 94 學年度國中畢業生之間並未大幅度減低。

經比較高中暫行綱要與 94 學年度九年一貫正式綱要內涵，本小組也發現兩者之間並無銜接上的困難。換句話說，自 97 學年度起，除個別學生的情形之外，國中與高中、高職數學課程之間應無銜接上的問題。

貳、銜接教材分析

本小組審視 92 至 95 學年間國中各年級數學課本（仁林、南一、康軒以及翰林版）後發現，其教材內容與 94 學年度高一新生在國中階段所學習的內容並無顯著的差異，也就是說，相較於國中 83 年課程標準的教學

進度，95、96 年這兩屆高一新生在國中階段一、二年級仍約落後一年，雖然在三年級下學期勉強趕上，但整體內容仍是過於簡化。

95、96 年銜接教材內容係以這兩屆國三畢業生與近二年高一一般程度新生之間的落差、84 年高中課程標準及 95 年高中課程暫行綱要之間的差異為考量。

相較於 84 年高中課程標準，高中暫行綱要的高一課程有幾個較大的改變：

- 一、 **高中暫行綱要將邏輯的基本概念，定位在需應用時再加以說明。**例如：在第一章證明 $\sqrt{2}$ 為無理數時，再導入反證法的推導程序及意義，而相關的推理邏輯則是安排在高一上的附錄中說明。一般而言，在高中課程中僅需引導學生熟悉「若 P 則 Q」的推理過程，並且理解「若非 Q 則非 P」的推論與「若 P 則 Q」是等價的。
- 二、 **集合的基本概念，融入在高二排列組合的單元中。**事實上，在集合論中，兩個集合間的**聯集、交集及包含關係**是高中生應具備的基本知識，而且在高中暫行綱要高一下的多項式不等式單元中就需引進聯集、交集的概念來決定解的範圍。
- 三、 **函數的整體概念，安排在高一下的附錄中。**整體而言，高中暫綱不強調形式化的數學，而函數是引用自然的對應關係來介紹，所以不強調函數定義域及值域的教學，也不強調映至、映成和一對一函數的概念。因此，暫綱也不強調反函數的概念，而指數與對數之間的對應關係則是由其定義及公式來詮釋。
- 四、 **三角函數的圖形部分，高中暫綱強調較常運用的正弦、餘弦及正切，而餘切、正割與餘割函數的圖形則是列入高一下學期的附錄之中；**在三角函數的運算部分，高中暫綱刪除和差化積公式，而將較常應用的積化和差公式併入和角公式的子題之中；至於反三角函數則是配合反函數概念的弱化，一併刪除。

以高一課程份量而言，95 年暫行綱要約為 84 年課程標準的 3/4，以每週四節課來說，趕課的壓力比起往年稍為減輕。然而，95 年暫行綱要課程對集合與函數概念的教學理念與 84 年課程標準有較大的改變，這是老師們宜提前調適的。

為因應高中暫行綱要的內涵及 95、96 學年度國中畢業生銜接的落差，我們對 94 學年度銜接教材再進行調整，進而歸納出「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」、「一元二次方程式」、「數列與級數」和「函數」等六個單元，並在附錄中列出「立方根與高次方根」、「一元二次方程式的根與係數關係」、「不等式與集合」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」五個單元，來協助同學們順利銜接高中課程的學習。

在教材中，我們將「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」及「一元二次方程式」等單元列為預備階段，希望高一新生能在進入高中的課程之前，強化這四個單元的基礎知識；而融入階段的「數列與級數」和「函數」二個單元則是插入高中暫行綱要課程的對應單元，做為基礎知識。

本教材除經諮詢委員會審議外，也經相關縣市國高中數學科輔導團，以及國立羅東高中官長壽老師、國立基隆女中陳宗鈺老師、國立台中一中連世和老師、國立竹山高中曾文亮老師、國立北港高中吳山林老師及國立善化高中黃桂妮老師提供修正意見，在此一併致謝。

為協助各高中數學領域教師瞭解九年一貫暫行綱要課程內容落差及銜接教學實施情形，茲依下列各主題單元分別予以說明。

一、乘法公式與多項式

國中 83 年課程標準中有關乘法公式與多項式的學習是由簡單的乘法公式開始並依序介紹平方及立方公式，並推演到多項式的四則運算。其中多項式的加、減、乘或除法運算雖以一次或二次多項式為主，仍然結合平方與立方公式來介紹較常用的高次多項式。因此，一般的學生對於高次多項式並不致於感到陌生。

由於暫行綱要僅將常用的二項式乘積、完全平方及平方差公式：

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd ;$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 ;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) ,$$

納入其中，但刪除以下的立方公式：

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 ;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) ,$$

因此，多項式的主題僅侷限於一次、二次多項式之間的加法、減法或乘法運算，鮮少在課本中出現三次以上的多項式。國中老師或許會在教學現場進行補強，但一般來說，學生對常見的高次多項式相當陌生。例如：

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 、 $x^3 + 1$ 、 $x^4 - 1$ 等。

相較於 83 年課程標準，國中暫行綱要並未介紹多項式的除法，也就是說，課程中未如同以往將兩個正整數相除得到商和餘數的概念，延伸到多項式的直式除法，進而結合加法與乘法得到：

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}$$

換言之，暫行綱要的課程並未提到除式、被除式或餘式等名詞，以及三者之間次數的關係，乃至於多項式的直式除法以及整除的概念。

在銜接教材中，除了複習常用的平方公式之外，我們希望引導學生理解如何使用平方公式來簡化數的運算。對多數的學生來說，雖然立方和、立方差和完全立方公式可能是新的單元，但是這些公式只須引用分配律就可以推導出來。除了讓學生理解公式的推導過程外，我們建議老師們可酌量增加學生練習的份量，來提昇計算的熟練度。至於多項式的除法，我們則是與因式與倍式的單元結合，而列於第 2-1 節的子單元之中。

二、因式分解

國中 83 年課程標準中有關因式分解的學習，除了引用乘法的概念來介紹因式與倍式之外，因式與倍式關係的判別則是引用能否整除來進行，再依

序介紹提出公因式與分組分解、利用乘法公式、十字交乘法等方法作因式分解。

由於缺少多項式除法的學習，國中暫行綱要則是直接引用二個代數式相乘的逆運算來介紹因式分解，現階段的國中生顯然比較沒有因式與倍式的概念。根據國中老師的反應，學生除了直接提出公因式、利用乘法公式或十字交乘較能有效學習之外，對於如何利用分組、拆項或替換變數等方法來改寫原來的算式使其較容易分解的概念相當薄弱。

在銜接教材中，我們仍先沿用二個多項式的乘積來介紹因式與倍式，並建議老師引導學生先練習用除法來檢驗多項式之間因式與倍式的關係。多項式除法教材中是以傳統的直式算法（含分離係數法）為主，而例題的被除式則是以三次多項式為主，我們希望老師能引導學生理解除式和餘式之間的次數關係，進而理解多項式整除的意義。

整體而言，除了利用立方公式之外，銜接教材中利用「提出公因式」、「平方公式」或「十字交乘」等方法來因式分解的子題都是定位在複習，並適度延伸到雙變數算式的因式分解。在第 2-2 節中，我們也提出分組或拆項後分組的概念，這是希望學生理解如何運用這些技巧來嘗試克服無法直接提公因式的困難。

在國中暫行綱要中，配方法是定位在一元二次方程式的解法，而忽略此方法在因式分解的重要性。事實上，配方法即是增項、補項概念的延伸。因此，在第 2-5 節中，我們引進配方的概念來因式分解，這也是為了強化以配方法解一元二次方程式，並鋪陳求二次函數的最大值、最小值等單元的學習。

至於利用特殊的乘法公式來做因式分解部分，我們建議老師們視需求補充下面這個運用完全立方及立方和公式來做因式分解的範例、類題練習及相關的說明。

【範例】 作 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的因式分解。

【解】 利用完全立方公式 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
及立方和公式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz \\ &= [(x+y)^3 + z^3] - 3xy(x+y+z) \\ &= [(x+y)+z][(x+y)^2 - (x+y) \cdot z + z^2] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2 - 3xy) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

由這個例子，我們可以得到

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

這個立方公式。事實上，在現行高中數學第三冊中，也可以運用行列式來求得這個立方公式。

【類題練習】 (1) 因式分解 $x^3 + y^3 - 3xy + 1$ 。

(2) 已知 $xyz \neq 0$ 且 $x+y+z=0$ ，求 $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$ 的值。

此外，此範例中的分解式 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ ，可以再改寫成下列的式子：

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\ &= \frac{1}{2}[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \end{aligned}$$

而在高中的課程中，這個結果常被應用來處理類似下面的練習題：

設 x 、 y 、 z 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，且滿足 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ，試問 $\triangle ABC$ 為何種三角形？

從上面的運算結果得知，

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$$

$$\text{所以 } x - y = 0, y - z = 0, z - x = 0$$

$$\text{可得 } x = y = z \Rightarrow \triangle ABC \text{ 爲正三角形。}$$

三、平方根

九年一貫暫行綱要雖然將乘法公式定位在平方公式，多項式定位在以二次式爲主，仍然忽略了簡易平方根的計算而將主題侷限在平方根的認識，而平方根的近似值則透過電算器來認識。整體而言，暫行綱要弱化了方根的學習，也因此未能將一元二次方程式公式解的學習納入能力指標之中。

雖是如此，目前的國中教材已將平方根的乘法和除法

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

納入其中，並且與正整數的因數分解相結合來做平方根的化簡。然而，課程中仍然缺少如何對根式進行併項、化簡等方面的學習。換句話說，學生對最簡方根、同類方根的概念較爲薄弱，對平方根做有理化的運算更是陌生。

在銜接教材 3-1 節中，我們首先複習平方根的定義，並學習以十分逼近法來求平方根的近似值，也透過畢氏定理及尺規作圖來理解平方根的幾何意義。在 3-2 節中，則是依序介紹最簡方根，同類方根的概念，並逐步鋪陳平方根的四則運算、根式的併項、化簡與有理化。

老師也可以視需要，將附錄 A1「立方根與高次方根」納入銜接，或鼓勵學生自我學習。

四、一元二次方程式

由於平方根定位在近似值的理解，暫行綱要刪除公式解的學習，也相對的弱化了以配方法解一元二次方程式的重要性。所幸，這樣的瑕疵已在修訂綱要的過程中被提出來，因此，與公式解相關的子題已納入現行課程之中。現行課程解一元二次方程式的架構雖與 83 年課程標準相似，依序提出利用乘法公式、十字交乘、配方等方法作因式分解來解方程式，但整體內容仍舊是過於簡化。經由教學現場的反應，我們觀察到學生在配方及公式解等子題的學習效果相對弱於使用十字交乘法。

在銜接教材中，我們希望加強配方法及公式解這兩個子題的學習，進而學習如何以判別式來理解根的性質，並建議老師能導引學生由一元二次多項式配方的概念來建立在以配方法解方程式的正確概念。

事實上，配方法是建立在增項與補項，並利用乘法公式的概念上。然而在配方法解方程式單元中，我們常見到以下的教學過程：

$$\begin{array}{ll}
 \text{將常數項移到等號右邊} & x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -2 \\
 \text{等號兩邊同加 } 2^2 \text{ 來配方} & \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = +2^2 - 2 \\
 \text{左式可寫成完全平方式} & \Rightarrow (x - 2)^2 = 2
 \end{array}$$

雖然此類程序有其教學上的方便，然常使得學生忽略增項與補項的重要概念，以至於常在函數求極值的過程中，由於未出現等號，而不會使用配方法。因此，我們建議使用以下的程序來教學：

$$\begin{array}{ll}
 \text{配方} & x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 2 = 0 \\
 \text{即} & \Rightarrow (x - 2)^2 - 2 = 0 \\
 \text{左式可寫成完全平方式} & \Rightarrow (x - 2)^2 = 2
 \end{array}$$

也建議老師們務必提醒學生注意增項與補項在配方法的重要性。

五、數列與級數

國中 83 年課程標準將數列與級數的主題安排於國三下學期課程之

中，其中包含等差數列、等差級數、等比數列、等比級數等單元。課程中對於有限數列、級數相關的概念及符號的使用皆有相當完整的介紹。

由於國中暫行綱要課程的特色是不強調形式化的數學模組，因而，以「樣式和規律」的單元來取代「數列與級數」，教材較不強調歸納有效且簡潔的數學公式。此外，國中暫行綱要將「樣式和規律」單元安排在代數主題之前，所以學生在不熟悉文字符號的使用下，只能以算術的方式來列式與解題，較無法引入未知數來協助解題。雖然各出版商聲稱已將數列與級數的概念融入教材中，但僅有某一版本以單獨的單元來介紹數列與級數。

如前面所提到的，在缺少乘法的立方公式的前提下，等比的概念或許融入樣式辨認的教學中，然而級數（如等比、甚至於等差）的學習仍然是銜接的重點。

在高中暫行綱要課程中，雖於第二章討論等差、等比數列與級數的相關性質，但是多數的版本都將有限項的等差、等比數列與級數的子題視為基礎知識，似未做較詳細的鋪陳，卻專注於無窮數列與級數的教學。然而，對 95、96 學年度高一新生而言，很顯然需要在有限項的數列與級數等子題仔細加以鋪陳後，再進入無窮數列與級數的教學。

各校可先以本教材為藍本先進行銜接教學，或者進行高一課程第二章數列與級數的教學時，再視需要將本單元的內容融入其中。

六、函數

在 83 年國中課程標準中，函數的主題僅侷限在線型函數與二次函數的教學。當時的學生或許未能充分領略其中的意涵，但是至少在銜接高中課程的過程中對「函數」這個名詞未必全然陌生。

較遺憾的是「函數」這個名詞並未出現在國中暫行綱要之中，縱使現行教科書的編者聲稱已將函數對應關係的概念融入相關子題，例如：「樣式和規律」或多項式求值等單元。事實上，學生能否因此領略出這些對應關係已具有函數的意涵，是值得商榷的。

九年一貫正式綱要則是重新將線型函數與二次函數納入能力指標。在國一的課程中，先藉由特殊的比例關係來介紹線型函數，引導學生認識函數的符號及線型函數的性質，並將二次函數的性質及其應用安排在國三，以銜接新的高中課程。

由於目前的國三學生普遍對一次、二次多項式的求值並不陌生，因此在第 6-1 節中，我們就以多項式的變數與對應值之間的關係為引言，來鋪陳函數的定義。至於第 6-2 節線型函數的學習，則是直接藉由二元一次方程式的圖形來介紹。至於二次函數的圖形，除了描點之外，在第 6-3 節中，我們希望強化圖形頂點、對稱軸的認識，再藉由圖形平移的概念來描繪。此外，我們著重以配方法二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 改寫成

$$y=a(x-h)^2+k$$

的形式，來鋪陳函數圖形、最大值以及最小值等子題的學習。

在第 6-4 節範例 1、2 中，我們首次使用集合的符號來表示自變數 x 和應變數 y 的範圍，此即是要鋪陳函數的定義域及值域的概念。雖然集合的整體被安排在高二的排列組合主題之中，然而在「多項式不等式」的單元中，仍需引用交集與聯集的概念來決定解的範圍，而這兩屆學生學過一元一次不等式，因此我們在附錄 A3-1 中以不等式解的範圍來解釋集合的意義及記法。老師可在教授「多項式不等式」的單元之前先引導學生閱讀附錄 A3-1 的內容，必要時以 A3-2 來複習一元一次不等式。

附錄 A1 立方根與高次方根

立方根的單元，可視為平方根相關子題的延伸。除了最簡方根，同類方根的概念之外，立方根的根式化簡及有理化，更可做為應用乘法公式的練習。至於高次方根的部分，我們僅介紹高次方根的記法、最簡方根及乘除運算規則，藉此來鋪陳指數為分數的指數律，以及高一下學期「指數與對數」主題的學習。

附錄 A2 一元二次方程式的根與係數的關係

一元二次方程式解的根與係數關係，可視為「數與坐標系」的預備知識之一。由於此主題亦為高中課程的內容，因此將其改列為附錄。不過，我們仍建議老師們在第四單元「一元二次方程式」的銜接教學時，視情況將此附錄納入教學範圍，或要求學生自我學習。

附錄 A3 不等式與集合

如前面所提到的，高中課程中聯集、交集的概念遠較集合論中其他的性質來得重要。事實上，在國中 83 年課程標準、國中暫行綱要，以及國中正式綱要的一元一次不等式及二元一次聯立方程式，即透過數線找共同解的過程來鋪陳聯集、交集的概念。雖然高中暫行綱要將集合的概念融入高二排列組合的單元中，但由於高一上學期多項式不等式求解的過程需引用聯集、交集的概念，因此，我們仍建議在進入這個單元之前，應鋪陳一些集合的基本概念。

由於這二屆學生在國三學過一元一次不等式，因此，我們先在 A3-1 中，以簡單的不等式解的範圍來介紹集合的意義、記法及常用的符號；再於 A3-2 中，將聯集、交集的概念再次融入一元一次不等式的求解方法之中。在銜接教材中，我們著重不等式的所有解和解集合的連結，其中聯立不等式是以不等式合併的形式來呈現。至於聯立不等式解的範圍也藉由數線來呈現，藉此鋪陳聯集、交集的概念。此外，我們也引進一次絕對值不等式來連結合併形式的不等式，並再次強化學生處理不等式的能力。

此外，學生對如「 $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ 」推論的結果視為自然，但對於推導的過程則是相當陌生。因此，在 A3-3 中，我們希望藉由較常見的不等式來強化學生對不等式推論演繹過程的理解。如果這兩屆的高一學生仍不熟悉不等式的運算規則，我們建議老師將 A3-3 置於 A3-2 之前先進行銜接教學。

附錄 A3-4 「一元二次不等式」雖然是高中課程的內容，我們相信中上

程度的學生可以將一元一次不等式、一元二次方程式及二次函數的概念相互結合來學習一元二次不等式。我們建議老師們引導同學們能自我學習此單元的內容。

附錄 A4 平面幾何的基本性質

國中 83 年課程以將近一學年(二下~三上)來鋪陳幾何概念的學習，其中先由簡單的幾何圖形開始介紹，依序為尺規作圖、三角形的基本性質、平行、相似形、圓形、並於最後完整介紹幾何推理、綜合證題法、三角形的內心、外心與重心。國中暫行綱要原是將幾何概念的學習採用螺旋式的設計分布於三個年級，然因受到暫行綱要整體進度較以往落後至少半年的批評，以致於散見於一、三年級。其中，國一學生即以實物操作的方式認識相關的性質，例如：以摺紙的操作了解三角形的外心、內心和重心，較為鬆散，而這些性質的說明與推理則是在的國三上學期再進行。雖然這樣的現象已略有改善，但綜合來說，目前國中的教材仍是將過去大約 $1\frac{2}{3}$ 學期的內容（三角形的全等、平行、平行四邊形、相似形、圓的性質、三角形的三心、幾何證明）壓縮在略多於 1 學期，這使得幾何的學習非常匆忙。

由於高中暫行綱要的高一課程中，直至第五、六章(高一下學期)才需要藉由相似三角形或圓的性質來學習三角函數的相關性質。因此，我們僅條列出國中階段平面圖形的重要性質，提供學生做為複習的參考。

附錄 A5 三角函數的基本概念

在國中 83 年課程標準中，三角函數的單元被列入選修教材，來認識銳角三角函數基礎知識，再於高中階段深入。但受國中學力測驗不得將選修教材納入命題的影響，此單元的學習成效大幅降低，進而影響了高中的教學成效。更甚者，三角函數的學習也未列入國中暫行綱要的能力指標之中。

高中課程雖然也對此單元做鋪陳，然而整體成效已不如早期分屬在國

請各校在進入 95 暫綱高一課程之前，完成預備階段四個單元的銜接教學。各校可視需要，將附錄 A1「立方根與高次方根」或附錄 A2「一元二次方程式的根與係數關係」分別融入第三、第四單元之中，來提昇銜接教學之成效。

二、【融入階段】 第五單元 數列與級數（4 節課） 第六單元 函數（4 節課）

在此階段中，本小組建議將第五單元視為 95 暫綱高一上第二章「數列與級數」之先備教材，依對應的節次來融入教學；第六單元應視為 95 暫綱高一上第三章「多項式」之先備教材。

由於銜接教材內容多為高一上學期課程的先備知識，因此銜接教學應在高一上學期實施為宜，其中可考慮在開學前一至二周開始進行預備階段(第一至第四單元)的銜接教學。本小組建議高一上學期以每週增加一節課為原則來配合銜接教學，必要時可將「多項式不等式」的單元移至寒假輔導或高一下學期。

由於 95 暫綱高一課程份量已略為減少，國中教學現場成效也有所提昇，使得 95、96 學年銜接的落差也略為降低，教育部將補助鐘點費 95、96 學年度高一上學期每校每班 20 節。至於銜接教材部分，將比照 94 學年度，由教育部統一印製銜接教材，免費發給高一新生。

有鑒於各校高一學生數學基礎知識差異性各有不同，建議各校透過檢測的機制瞭解學生的實際差異程度，再視需要調整銜接課程教學內容及教學時數。然而，除教育部補助部分之外，所需經費應自行依相關規定辦理。

附錄一：高中課程暫行綱要

暫行綱要網址：[http://www.ck.tp.edu.tw/xoops/downloads1/A04_數學\(必修\).doc](http://www.ck.tp.edu.tw/xoops/downloads1/A04_數學(必修).doc)

普通高級中學必修科目「數學」課程綱要

壹、目標

普通高級中學必修科目「數學」課程欲達成之目標如下：

- 一、引導學生瞭解數學的內容，意義及方法。
- 二、培養學生以數學思考問題，分析問題，解決問題的能力。
- 三、提供學生在實際生活和學習相關學科方面所需的數學知能。
- 四、培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

貳、時間分配

第一、二學年每學期四學分，每週授課四節。

參、教材綱要

普通高級中學必修科目「數學」課程十六學分。

第一學年

主題	主要內容	說明
一、 數與坐標系	1.整數 2.有理數與實數 3.平面坐標系* 4.複數與複數平面	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。 2-1 介紹無理數如 \sqrt{n} 和 π ，其中 n 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。 2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 n, m 為正整數。 3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。 4-1 介紹 i 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於0之情形。 4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。
二、 數列與級數	1.等差級數與等比級數 2.無窮等比級數與循環小數 3.數學歸納法*	1-1 含數列與級數的基本概念。 2-1 介紹最基本的極限概念。 3-1 介紹數學歸納法並應用於證明。
三、 * 多項式	1.多項式的四則運算 2.餘式定理、因式定理 3.最高公因式與最低公倍式 4.多項式函數 5.多項式方程式 6.多項式不等式	1-1 含綜合除法。 2-1 含整係數多項式的一次因式檢驗法。 3-1 利用輾轉相除法求最高公因式。 4-1 含一次、二次多項式函數的圖形。 5-1 含代數基本定理的介紹，勘根定理和實係數多項式方程式虛根成對定理。 6-1 瞭解已分解為一次因式乘積的多項式在實數線上恆正、恆負的區間。

主題	主要內容	說明
附錄	認識證明	以到目前為止學過的數學，介紹如何進行推論與證明。
四、 * 指數與對數	1.指數 2.指數函數及其圖形 3.對數 4.對數函數及其圖形 5.查表、內插法	4-1 指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。 5-1 可用電算器求出指數函數與對數函數的值。
五、 * 三角函數的基本概念	1.銳角三角函數 2.三角函數的基本關係 3.簡易測量與三角函數值表 4.廣義角的三角函數 5.正弦定理與餘弦定理 6.基本三角測量	1-1 先處理有一個銳角為 30° ，或 45° 的直角三角形邊角性質。 2-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。 3-1 可用電算器求出三角函數值。
六、 三角函數的性質與應用	1.三角函數的圖形* 2.和角公式* 3.倍角*、半角公式 4.正餘弦函數之疊合 5.複數的極式	1-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。 2-1 含積化和差公式。 4-1 以實例說明疊合的意義。 5-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根。
附錄	1.函數的概念* 2.餘切函數、正割函數和餘割函數的圖形	以到目前為止學過的數學統整函數的概念。

第二學年

主題	主要內容	說明
一、 向量	1.有向線段與向量 2.向量的基本應用* 3.平面向量的坐標表示法* 4.平面向量的內積*	1-1 含向量的加法、減法、係數積與內積等運算。 2-1 含向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。 3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算以及分點坐標、直線的參數式。 4-1 含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、點到直線的距離。
二、 空間中的直線與平面	1.空間概念 2.空間坐標系* 3.空間向量的坐標表示法 4.平面方程式 5.空間直線方程式 6.一次方程組	1-1 空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。 3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算，柯西不等式，正射影。 4-1 含法向量、平面的夾角、點到平面的距離。 5-1 含直線的參數式、點到直線的距離、平行線的距離、歪斜線的公垂線段長。 6-1 限二元、三元。 6-2 含高斯消去法。 6-3 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式和二階行列式。 6-4 以二階行列式求平面上平行四邊形的面積。

主題	主要內容	說明
三、 圓與球面的 方程式	1.圓的方程式* 2.圓與直線的關係 3.球面方程式 4.球面與平面的關係	
四、 圓錐曲線	1.圓錐曲線名詞的由來 2.拋物線（標準式） 3.橢圓（標準式） 4.雙曲線（標準式） 5.圓錐曲線的光學性質	4-1 含漸近線。
五、* 排列、 組合	1.集合元素的計數 2.加法原理、乘法原理 3.排列 4.組合 5.二項式定理 6.遞迴關係	1-1 含排容原理。 5-1 以組合概念導出。 6-1 遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 α, β, γ 為常數， $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式。
六、* 機率與統計 (I)	1.事件與集合 2.機率的性質 3.數學期望值 4.統計資料的來源	1-1 集合簡介。 1-2 樣本空間與事件。 4-1 觀測研究、抽樣調查、實驗。需介紹及使用亂數表，抽樣調查法需含簡單隨機抽樣法。

主題	主要內容	說明
	5.分析一維數據	5-1 圖表編製，數據集中趨勢，數據離散趨勢，整合集中與離散趨勢，以瞭解數據的全貌。
	6.信賴區間與信心水準的解讀	6-1 常態分配及 68-95-99.7 規律。僅需處理二元資料，不必引進機率模型，以教學活動瞭解信賴區間與信心水準的解讀。

註：「*」為「後期中等教育共同核心課程指引」內容。

肆、實施方法

一、教材編選

- (一) 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接，並注意教材內容應具時代性與前瞻性。
- (二) 教材應以一精緻、完備之出版品呈現。
- (三) 教材應注意到銜接、統整和連結。
- (四) 教材之呈現應循序漸進，引發學習動機，在直觀與嚴謹之間取得平衡，並兼顧從特例到一般推理之必要。
- (五) 習題要扣緊主題，在例題之後應有隨堂練習，在課文之後應有啟發深思的練習。
- (六) 教師手冊要提供教師對教材進一步的認識，對課程深入的瞭解和最有效率的教法。教師手冊亦應提供相關的進階資訊，供教師參考。
- (七) 專有名詞應採用教育部最新編訂公佈的數學名詞。各專有名詞及外國人名應於索引中附原文。
- (八) 機率與統計 (I) 新增信賴區間與信心水準的解讀一節，其相關的教學活動建議由全班每一位同學各自以亂數表模擬丟銅板的過程，代入銅板正面機率信賴區間的算式 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ 來得到各自所得的信賴區間，並察覺大多數同學所得的信賴區間會涵蓋銅板正面機率的真實值。

二、教學方法

- (一) 應透過各校教學研究會要求行政系統配合，以達成因材施教的目標。

- (二) 教學應具彈性但要掌握教材之核心原理原則，以期流暢清晰。
- (三) 對習題要提示，要要求，要進行討論，以期在方法上不斷深化，精益求精。

三、教具及有關教學設備

- (一) 以電腦協助對函數圖形、立體幾何、解方程式和統計課程之進行。
- (二) 請相關單位經常協助提供各類與教學相關之國內外網址。相關單位如下：
 1. 中華民國數學會。
 2. 中華民國統計學社。
 3. 國科會科教處。
 4. 各師資培育機構。
 5. 國立教育資料館。

四、教學評量

數學學習首重習題。

- (一) 隨堂演習，由學生上台演練，各校應提供演習之時數。
- (二) 家庭作業，經由教師適當的提示，學生課後將習題做好，交回給教師，學校應提供改作業的人力。
- (三) 測驗的方式宜有彈性，但要給予充分的時間思考。測驗的題目應區分為基礎和進階兩類。

附錄二、85 年課程標準與 95 年暫行綱要高中一年級數學課程比較

第一學期

85 年課程標準			95 年暫行綱要		
主題	主要內容	說明	主題	主要內容	說明
一、基礎概念	1.簡單的邏輯概念	1.利用國中平面幾何知識來介紹簡單的邏輯概念—包含充分條件、必要條件、充要條件及反證法的例子（約二至三節課）			註：移至第一冊附錄認識證明
	2.集合的基本概念	2.集合的表示法、屬於、交集、聯集、子集、補集，以將來要用到的實例為主，不涉及抽象的集合（約二節課）			註：1. 在高二排列組合單元中介紹 2. 可在 3-6 節多項式不等式中引進交集、聯集的概念
	3.函數的基本概念	3.以變量的對應關係說函數的意義（約二節課）			註：移至第二冊附錄認識函數

二、數與坐標系	1.整數	1.含因數、倍數與輾轉相除法。	一、數與坐標系	1.整數	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。
	2.有理數與實數			2.有理數與實數	2-1 介紹無理數如 \sqrt{n} 和 π ，其中 n 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。 2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 n, m 為正整數。
	3.平面坐標系			3.平面坐標系	3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。
	4.複數與複數平面			4.複數與複數平面	4-1 介紹 i 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於 0 之情形。 4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。

三、 數列 與 級數	1.等差級數與等比級數	1.含數列的基本概念。	二、 數列 與 級數	1.等差級數與等比級數	1-1 含數列與級數的基本概念。
	2.無窮等比級數與循環小數	2.這裡先給學生一些最基本的極限概念。		2.無窮等比級數與循環小數	2-1 介紹最基本的極限概念。
	3.數學歸納法	3.主要在教「數學歸納法」這個方法，及用來歸納並證明一些級數的和並引進遞迴數列的例子。		3.數學歸納法	3-1 介紹數學歸納法並應用於證明。 註：遞迴關係移至高二組合單元中介紹

四、 多項式	1.多項式的四則 運算	1.含綜合除法。	三、 多項式	1.多項式的四則 運算	1-1 含綜合除法。
	2.餘式定理、因 式定理	2.含整係數多項式的一次因式檢驗法。		2.餘式定理、因 式定理	2-1 含整係數多項式的一次因式檢驗 法。
	3.最高公因式與 最低公倍式	3.利用輾轉相除法求最高公因式。		3.最高公因式與 最低公倍式	3-1 利用輾轉相除法求最高公因式。
	4.多項函數	4.包含一次、二次函數圖形。		4.多項式函數	4-1 含一次、二次多項式函數的圖形。
	5.多項方程式	5.含代數基本定理、勘根定理與實係數多 項方程式虛根成對定理。		5.多項式方程式	5-1 含代數基本定理的介紹，勘根定理 和實係數多項式方程式虛根成對 定理。
	6.多項不等式			6.多項式不等式	6-1 瞭解已分解為一次因式乘積的多 項式在實數線上恆正、恆負的區 間。
			附 錄	認識證明	以到目前為止學過的數學，介紹如何 進行推論與證明。

第二學期

85 年課程標準			95 年暫行綱要		
五、 指數與對數	1.指數		四、 指數與對數	1.指數	
	2.指數函數及其圖形			2.指數函數及其圖形	
	3.對數			3.對數	
	4.對數函數及其圖形	4.說明反函數的意義及其圖形。		4.對數函數及其圖形	4-1 指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。
	5.查表、內插法	5.可用電算器求出指數函數與對數函數的值。		5.查表、內插法	5-1 可用電算器求出指數函數與對數函數的值。

六、三角函數的基本概念	1.銳角三角函數		五、三角函數的基本概念	1.銳角三角函數	1-1 先處理有一個銳角為 30° ，或 45° 的直角三角形邊角性質。
	2.三角函數的基本關係	2.倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。		2.三角函數的基本關係	2-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。
	3.簡易測量與三角函數值表	3.可用電算器按出三角函數值。		3.簡易測量與三角函數值表	3-1 可用電算器求出三角函數值。
	4.廣義角的三角函數			4.廣義角的三角函數	
	5.正弦定理與餘弦定理			5.正弦定理與餘弦定理	
	6.基本三角測量			6.基本三角測量	

七、三角函數的性質與應用	1.三角函數的圖形	1.含弧度。	六、三角函數的性質與應用	1.三角函數的圖形	1-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。
	2.和角公式			2.和角公式	2-1 含積化和差公式。
	3.倍角、半角公式			3.倍角、半角公式	
	4.和、差與積的互化			4.正餘弦函數之疊合	4-1 以實例說明疊合的意義。
	5.正餘弦函數之疊合	5.以實例說明疊合的意義。		5.複數的極式	5-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根。
	6.反三角函數的基本概念	6.只提 \sin^{-1} 、 \cos^{-1} 、 \tan^{-1} 之定義，強調反三角函數的表示法。	附錄	1.函數的概念	以到目前為止學過的數學統整函數的概念。
	7.複數的極式	7.介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理，1 的 n 次方根(約四節課)。		2.餘切函數、正割函數和餘割函數的圖形	

- 備註: 1. 85 年高中課程標準第一、二學年每週授課五節。因配合週修二日將每週授課減為四節，然各校普遍以選修及輔導課每週共一至三節，並配合寒暑假輔導課方能授完課程。
2. 95 暫綱刪除和差化積公式及反三角函數的基本概念，而將積化和差公式併入 6-2 和角公式之中。
3. 95 暫綱第一、二學年每學期四學分，每週授課四節。