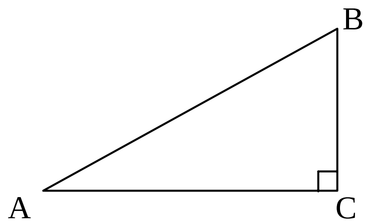
A5　三角函數的基本概念

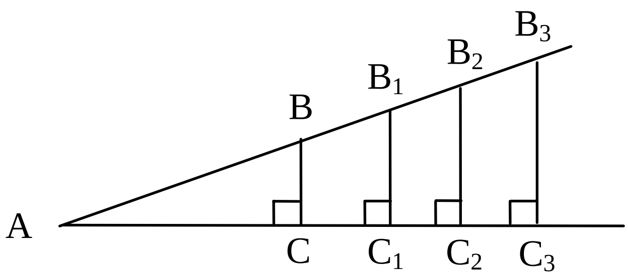
A5-1 認識銳角的三角函數



在右圖中的ΔABC為一個直角三角形，其中$\angle C = 90^\circ$。我們從下面兩個觀點來觀察直角三角形邊長的比值與角度的關係：

(1) 當銳角$\angle A$的大小固定時，無論將直角三角形畫的多大或多小（如下圖），由於$\overline{B_1C_1} // \overline{BC}$、$\overline{B_2C_2} // \overline{BC}$、$\overline{B_3C_3} // \overline{BC}$，所以這些直角三角形都相似，即$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2 \sim \Delta AB_3C_3$。

由相似三角形的性質，我們知道下列的六個比值都不會隨著三角形的大小而有所改變：

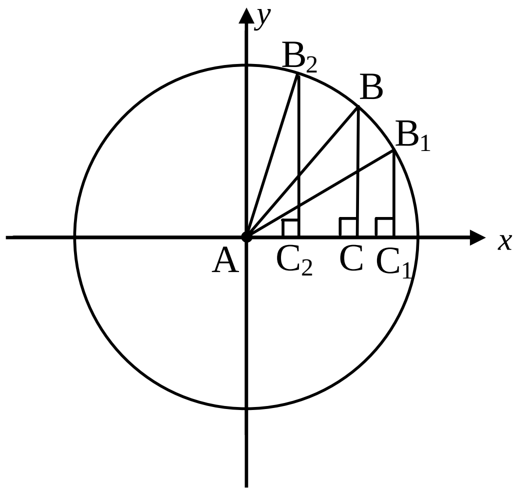


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \cdots\ ; \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \cdots\ ;$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \cdots\ ; \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \cdots\ ;$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \cdots\ ; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \cdots\ 。$$

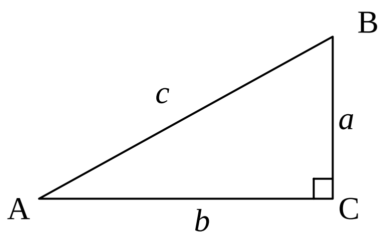
(2) 當 $\angle A$ 的大小改變時，如右圖，將直角 ΔABC 置於坐標平面上，其中以 A 爲原點，C 在 x 軸的正向，並且以 $\overline{AB}$ 爲半徑畫圓。我們發現，當 $\angle A$ 的大小改變時，這幾個斜邊長相等的直角三角形，它們的兩股長也隨著變動，於是上面的六個比值將會隨著 $\angle A$ 的大小而改變。



由(1)、(2)的討論可知，當直角三角形 ΔABC 中的銳角 $\angle A$ 的大小固定時，這六個邊長的比值不會因三角形的大小而改變。但是，當 $\angle A$ 的大小改變時，這些比值也隨著改變。於是，角度與比值之間會形成函數的對應關係，我們稱之爲「**三角函數**」。

【銳角三角函數的定義】

如右圖，ΔABC 爲一個直角三角形，其中 $\angle C=90°$。令 $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}=a$、$\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC}=b$ 和斜邊 $\overline{AB}=c$。



現在將前面所提到的六個比值分別定義成下列的六個函數：

$\angle A$ 的**正弦函數** $=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$；　$\angle A$ 的**餘弦函數** $=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$；

$\angle A$ 的**正切函數** $=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$；　$\angle A$ 的**餘切函數** $=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$；

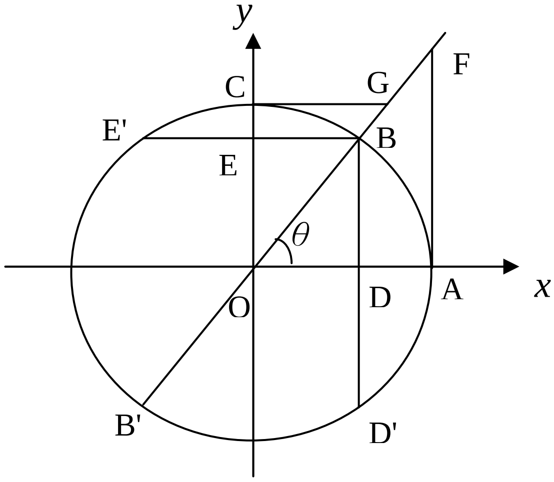
$\angle A$ 的**正割函數** $=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$；　$\angle A$ 的**餘割函數** $=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$。

爲了方便，我們將這六個函數分別簡記如下：

$\angle A$的正弦函數 = $\sin A$；	$\angle A$的餘弦函數 = $\cos A$；
$\angle A$的正切函數 = $\tan A$；	$\angle A$的餘切函數 = $\cot A$；
$\angle A$的正割函數 = $\sec A$；	$\angle A$的餘割函數 = $\csc A$，

其中 sin、cos 和 tan 分別為 sine、cosine 和 tangent 的簡寫；cot、sec 和 csc 則分別為 cotangent、secant 和 cosecant 的簡寫。

至於三角函數的中文命名請觀察右圖，以原點 O 為圓心的單位圓，與 x、y 軸的正向交於 A、C 兩點。在弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上一點 B，分別作弦 $\overline{BD'}$、$\overline{BE'}$，垂直 x、y 軸的正向於 D、E 兩點。過 A、C 分別作切線，交割線 $\overleftrightarrow{OB}$ 於 F、G，即可得到：



(1) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$；

(2) $\angle BOD=\angle OBE=\angle OGC=\theta$；

(3) ΔOBD、ΔOBE、ΔOAF、ΔOCG 皆為直角三角形。

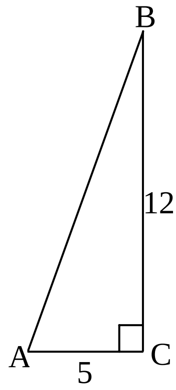
根據三角函數的定義，我們觀察到：

1. 在ΔOBD中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{BD}}{1}=\overline{BD}$，由於$\overline{BD}$在$\theta$角所對的弦$\overline{BD'}$上，故稱$\sin\theta$為「正弦函數」。
2. 在ΔOBE中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{BE}}{1}=\overline{BE}$，由於$\overline{BE}$在$\theta$的餘角$\angle BOE$所對的弦$\overline{BE'}$上，故稱$\cos\theta$為「餘弦函數」。
3. 在ΔOAF中，$\tan\theta=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AF}}{1}=\overline{AF}$，由於$\overline{AF}$在$\theta$角所對的切線$\overleftrightarrow{AF}$上，故稱$\tan\theta$為「正切函數」。
4. 在ΔOCG中，$\cot\theta=\dfrac{\overline{CG}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{CG}}{1}=\overline{CG}$，由於$\overline{CG}$在$\theta$的餘角$\angle BOE$所對的切線$\overleftrightarrow{CG}$上，故稱$\cot\theta$為「餘切函數」。

5. 在ΔOAF中，$\sec\theta=\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OF}}{1}=\overline{OF}$，由於$\overline{OF}$在$\theta$角所在的割線$\overleftrightarrow{OB}$上，故稱$\sec\theta$爲「正割函數」。

6. 在ΔOCG中，$\csc\theta=\dfrac{\overline{OG}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{OG}}{1}=\overline{OG}$，由於$\overline{OG}$在$\theta$的餘角所在的割線$\overleftrightarrow{OB}$上，故稱$\csc\theta$爲「餘割函數」。

【範例 1】 已知ΔABC爲一個直角三角形，其中$\angle C=90°$，$\angle A$爲較大的銳角，兩股長分別爲 5、12。求$\angle A$的六個三角函數值。



【解】 $\because$ $\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=12$ （大角對大邊）

$\therefore$ 斜邊長$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2+12^2}$

$=\sqrt{169}=13$

$\Rightarrow \sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{13}$；$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{13}$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{12}{5}$；$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{5}{12}$；

$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{13}{5}$；$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{13}{12}$。

【類題練習 1】 已知ΔABC爲直角三角形，其中$\angle C=90°$、$\overline{AC}=2$和$\overline{AB}=5$，求$\angle B$的六個三角函數的值。

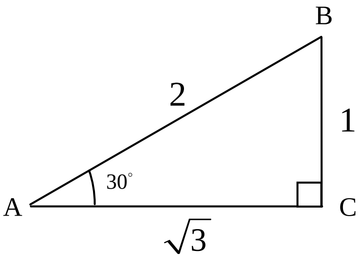
【範例 2】 已知ΔABC爲直角三角形，其中$\angle C=90°$、$\angle A=30°$。試回答下列問題：

(1) 求$\angle A$的六個三角函數值。

(2) 求$(\sin A)^2+(\cos A)^2$。

(3) 求$(\sin B)^2+(\cos B)^2$。

【解】 如右圖，直角三角形三邊長的比爲$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=\sqrt{3}:1:2$ 。



(1) $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$ ；

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$ ；

$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ；

$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{1}=2$

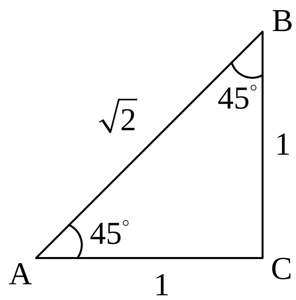
(2) $(\sin A)^2+(\cos A)^2=(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}})^2+(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}})^2=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$

(3) $(\sin B)^2+(\cos B)^2=(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}})^2+(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}})^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$

在範例 2 中，因爲$\angle A=30°$，我們常將$\sin A$直接寫成$\sin 30°$，也就是說，$\sin 30°$就是$30°$角的正弦函數值。又爲了方便書寫，也常將$(\sin A)^2$寫成$\sin^2 A$、$(\cos A)^2$寫成$\cos^2 A$、⋯，而$\sin 2A$則是$\sin(A+A)$， $\cos 2A$則是$\cos(A+A)$、⋯。

【範例 3】 分別求出$45°$角的六個三角函數值。

【解】 如右圖，直角三角形三邊長的比例爲$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$ 。



所以 $\sin 45°=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ；

$\cos 45°=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ；

$\tan 45°=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{1}=1$ ；

$\cot 45°=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{1}=1$ ；

$\sec 45°=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ ；

$$\csc 45^\circ = \frac{斜邊}{\angle A的對邊} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$ 。

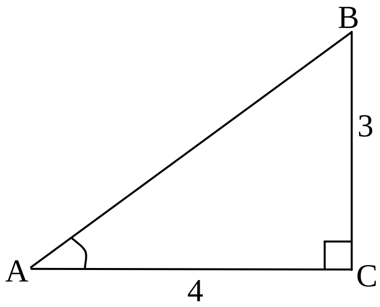
【類題練習 2】試完成下表：

$\angle A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
30°						
45°						
60°						

【範例 4】已知ΔABC爲直角三角形，其中$\angle C = 90^\circ$、$\cot A = \frac{4}{3}$。

求$\frac{\sin A}{1-\cot A} + \frac{\cos A}{1-\tan A}$。

【解】 因爲$\cot A = \frac{4}{3}$，所以$\overline{BC} : \overline{AC} = 3 : 4$，



即可設$\overline{BC} = 3x$，$\overline{AC} = 4x$，$x > 0$。

由畢氏定理，可知

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x$$ 。

因此，$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 5 : 3 : 4$。

$\Rightarrow$ $\sin A = \frac{\angle A的對邊}{斜邊} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$；

$\cos A = \frac{\angle A的鄰邊}{斜邊} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$；

$\tan A = \frac{\angle A的對邊}{\angle A的鄰邊} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}$

所以 $$\frac{\sin A}{1-\cot A} + \frac{\cos A}{1-\tan A} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{3}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{4}} = -\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{7}{5}$$ 。

【類題練習 3】已知直角ΔABC中，$\angle A$爲銳角且$\sec A=\dfrac{17}{8}$，

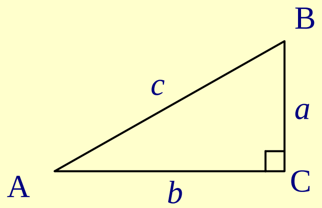
求$\dfrac{\sin A}{1-\tan A}+\dfrac{\cos A}{1-\cot A}$。

【重點整理】

1. 當直角三角形中銳角角度的大小固定時，不論三角形的大小如何，其對應的兩邊長的比值恆固定，角度與比值形成了函數的對應關係。
2. ΔABC中，如右圖，$\angle A$的六個三角函數爲：

$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$，

$\cot A=\dfrac{b}{a}$，$\sec A=\dfrac{c}{b}$，$\csc A=\dfrac{c}{a}$



【家庭作業】

基礎題

1. 已知$\angle A$爲銳角且$\tan A=\dfrac{1}{3}$，求$\angle A$的其它五個三角函數值。
2. 求下列各式的值：

① $\cos 30^\circ-\sin 30^\circ+\cos 60^\circ-\tan 45^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cot 60^\circ$

② $\dfrac{\tan 60^\circ-\cot 30^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 30^\circ}$　　③ $\dfrac{1+\sin 60^\circ-\cot 45^\circ}{1+\sec 30^\circ-\tan 45^\circ}$

④ $\sec^2 60^\circ-\tan^2 60^\circ+\cot^2 30^\circ-\csc^2 30^\circ$

3. 求$\sin 80^\circ\cos 80^\circ\tan 80^\circ\cot 80^\circ\sec 80^\circ\csc 80^\circ$。
4. 設$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$都是銳角，且$\sin A=\dfrac{1}{2}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cot C=\sqrt{3}$，$\csc D=2$，求$\angle A+\angle B-\angle C+\angle D$。
5. 在ΔABC中，$\angle C=90^\circ$、$\sin A=\dfrac{3}{5}$和$\overline{AB}=20$。試回答下列各題：

① 求$\overline{BC}$和$\overline{CA}$的長。　　② 求$\cos A$、$\cos B$、$\tan A$和$\tan B$。

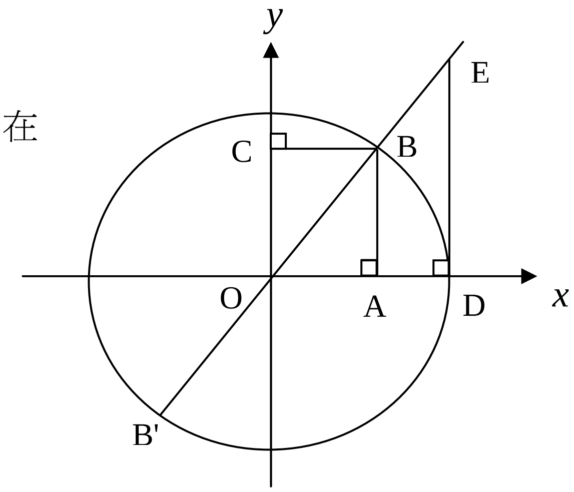
6. 設$\angle A$為小於$45°$的銳角，試比較$\sin A$、$\cos A$、$\tan A$、$\cot A$、$\sec A$、$\csc A$的大小順序。

進階題

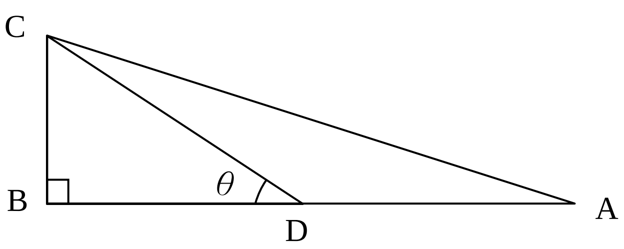
7. 在直角ΔABC中，$\angle C = 90°$。已知$\overline{BC} - \overline{CA} = \dfrac{\overline{AB}}{5}$，求$\tan A$。

8. 在銳角三角形ΔABC中，已知$\sin B = \dfrac{3}{5}$，$\sin C = \dfrac{15}{17}$，若$\overline{AB} = 25$求$\overline{AC}$、$\overline{BC}$及ΔABC的面積。

9. 如右圖，圓 O 為單位圓，B、D 在圓周上，若$\overline{DE} = \dfrac{12}{5}$，求$\overline{AB}$及四邊形 OABC 的面積。



10. 如下圖，直角三角形ΔABC中，D 在$\overline{AB}$上且$\angle BDC = 2\angle BAC$。若$\tan\theta = \dfrac{3}{4}$，求$\tan A$。

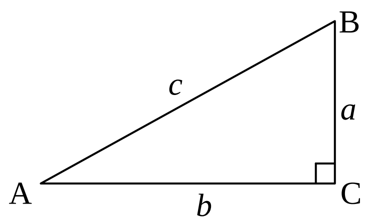


A5-2 銳角三角函數的基本關係

設ΔABC為直角三角形，其中$\angle C = 90°$。以下各題將引導你發現六個三角函數彼此之間的關係：

【範例 1】 試說明$\sin A \csc A = 1$。

【解】 　用ΔABC的任兩邊長可作成兩種比值，



例如：$\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 可作成 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 或 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 兩種比值，

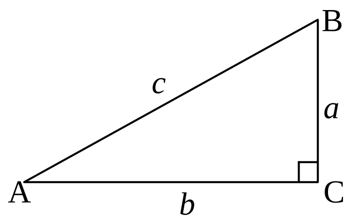
若將兩者相乘，其積爲 1，

即得 $\sin A \csc A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$ 。

由範例 1，可知 $\sin A = \dfrac{1}{\csc A}$ 或 $\csc A = \dfrac{1}{\sin A}$ ，我們稱 sin$A$ 與 csc$A$ 兩函數具有**倒數關係**。同樣的，sin$B$ 與 csc$B$ 兩函數具有倒數關係。

【類題練習 1】請找出範例 1 中， $\angle A$ 的其它三角函數間的倒數關係。

【範例 2】試說明 $\sin A = \cos B$ 且 $\sin B = \cos A$ 。



【解】 $\because$ $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}$ 恰爲 $\angle B$ 的鄰邊，且

$\angle B$ 的對邊 $\overline{AC}$ 恰爲 $\angle A$ 的鄰邊。

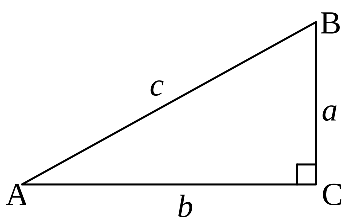
$$\therefore \quad \sin A = \frac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\angle B\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos B \;;$$

$$\text{且} \quad \sin B = \frac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos A \text{ 。}$$

在範例 2 中，因爲 $\angle A$ 和 $\angle B$ 互爲餘角，我們稱 sin 與 cos 兩函數具有**互餘關係**。

【類題練習 2】請找出範例 2 中，其它三角函數間的互餘關係。

【範例 3】試說明 $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ 。



【解】 用ΔABC的任一邊長當分母，其

他兩邊長分別當作分子，可作出

兩個比值，例如：$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$或$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 。

若將兩者相除約去共同分母，所得的商可爲另一個三角函數，

即 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}{\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\tan A$ 。

我們稱範例 3 中$\angle A$的正弦、餘弦和正切函數間的關係爲**商數關係。**

【類題練習 3】請找出範例 3 中，$\angle A$的其它三角函數間的商數關係。

【範例 4】使用範例 3 的圖形，試說明$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 。

【解】 根據畢氏定理$a^2+b^2=c^2$ ，將等號兩邊同除以c^2得到

$(\dfrac{a}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2=1\Rightarrow(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$ ，

也就是$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 。

我們稱範例 4 中$\angle A$的正弦和餘弦函數間的關係具有**平方關係**。

【類題練習 4】請找出範例 4 中$\angle A$的其它三角函數間的平方關係。

【範例 5】利用三角函數的基本性質，求下列各題：

(1) $(\sin 42^\circ-\sin 48^\circ)^2+(\cos 42^\circ+\cos 48^\circ)^2$

(2) $\dfrac{1}{1+\sin 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\cos 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\sec 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 5^\circ}$

【解】 (1) $(\sin 42^\circ-\sin 48^\circ)^2+(\cos 42^\circ+\cos 48^\circ)^2$

$$=\sin^2 42^\circ - 2\sin 42^\circ \sin 48^\circ + \sin^2 48^\circ$$

$$+\cos^2 42^\circ + 2\cos 42^\circ \cos 48^\circ + \cos^2 48^\circ$$

$$=\sin^2 42^\circ + \cos^2 42^\circ + \sin^2 48^\circ + \cos^2 48^\circ$$

$$-2\sin 42^\circ \sin 48^\circ + 2\cos 42^\circ \cos 48^\circ$$

$$=1+1-2\sin 42^\circ \sin 48^\circ + 2\sin 48^\circ \sin 42^\circ$$

$$=2$$

(2) $$\frac{1}{1+\sin 5^\circ}+\frac{1}{1+\cos 5^\circ}+\frac{1}{1+\sec 5^\circ}+\frac{1}{1+\csc 5^\circ}$$

$$=\frac{1}{1+\sin 5^\circ}+\frac{1}{1+\csc 5^\circ}+\frac{1}{1+\cos 5^\circ}+\frac{1}{1+\sec 5^\circ}$$

$$=\frac{1}{1+\sin 5^\circ}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin 5^\circ}}+\frac{1}{1+\cos 5^\circ}+\frac{1}{1+\frac{1}{\cos 5^\circ}}$$

$$=\frac{1}{1+\sin 5^\circ}+\frac{\sin 5^\circ}{1+\sin 5^\circ}+\frac{1}{1+\cos 5^\circ}+\frac{\cos 5^\circ}{1+\cos 5^\circ}$$

$$=\frac{1+\sin 5^\circ}{1+\sin 5^\circ}+\frac{1+\cos 5^\circ}{1+\cos 5^\circ}$$

$$=1+1$$

$$=2$$

【範例 6】設$\angle A$為銳角且$\sin A+\cos A=\dfrac{7}{5}$，求下列各式的值：

(1) $\sin A\cos A$　　(2) $\tan A+\cot A$

【解】 (1) 從乘法公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$可看出

$$(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$$

$$=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A$$

$$=1+2\sin A\cos A，$$

所以，$1+2\sin A\cos A=(\sin A+\cos A)^2=(\dfrac{7}{5})^2$。

因此，$\sin A\cos A=\dfrac{12}{25}$。

(2) 根據商數關係，再通分。

$$\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A\sin A}+\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$
$$=\frac{1}{\frac{12}{25}}$$
$$=\frac{25}{12}$$

【重點整理】

1. 銳角三角函數中常用的基本關係爲：($\angle A$爲銳角)
   (1) 倒數關係：$\sin A\csc A=1$；$\cos A\sec A=1$；$\tan A\cot A=1$。
   (2) 互餘關係：$\sin A=\cos B$ 且 $\sin B=\cos A$，其中 $\angle A+\angle B=90°$。
   (3) 商數關係：$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$；$\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$。
   (4) 平方關係：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；$1+\tan^2 A=\sec^2 A$；
   $1+\cot^2 A=\csc^2 A$。

【家庭作業】

基礎題

1. 求$\sin^2 67.2° + \sin^2 22.8°$。

2. 設$\angle A$爲銳角，求$\sin^2 A + \cos^2 A - \tan^2 A + \cot^2 A + \sec^2 A - \csc^2 A$。

3. 設$\angle A$爲銳角，求$(\sin A - \csc A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 - (\tan A - \cot A)^2$。

4. 設$\angle A$爲銳角，若$2\cos A = \cot A$，求$\angle A$。

進階題

5. 設$\angle A$爲銳角，求$\dfrac{\sec A}{\sec A - \tan A} + \dfrac{\csc A}{1 - \csc A}$。

6. 設$\angle A$爲銳角且$4\sin A + 3\cos A = 5$，求$\tan A$。

7. 設$\angle A$爲小於$45°$的銳角且$\tan A + \cot A = \dfrac{25}{12}$，試回答下列各題：

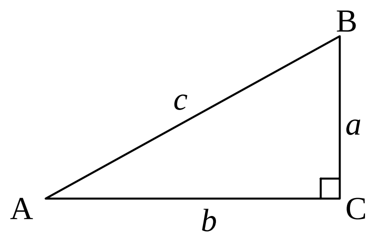
   ① 求$\sin A \cos A$。　　② 求$\sin A + \cos A$。

8. 設$\angle A$爲小於$45°$的銳角且$\sec A = \csc(2A)$，求$\angle A$。

9. 設$\angle A$爲銳角，試證$\dfrac{\sin A}{1 + \cos A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cos A} = 2\csc A$。

A5-3 銳角三角形的邊角關係

如右圖，ΔABC爲一個直角三角形，其中$\angle C = 90°$。令$\angle A$的對邊$\overline{BC} = a$、$\angle A$的鄰邊$\overline{AC} = b$和斜邊$\overline{AB} = c$。



因爲 $\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\cos A = \dfrac{b}{c}$；

$\tan A = \dfrac{a}{b}$，$\cot A = \dfrac{b}{a}$；

$\sec A = \dfrac{c}{b}$，$\csc A = \dfrac{c}{a}$，

所以 $a = c \times \sin A = b \times \tan A$；

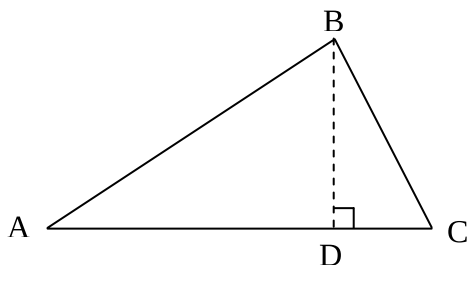
$b = c \times \cos A = a \times \cot A$；

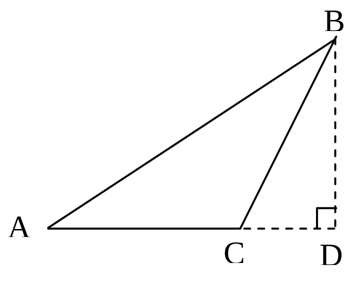
$c = b \times \sec A = a \times \csc A$。

我們學過三角形的面積公式爲$\dfrac{底 \times 高}{2}$，如果只知道某個三角形的兩邊及其夾角，能求這個三角形的面積呢？

假設我們知道ΔABC的兩邊長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$及這兩邊的夾角$\angle A$，並且分下列兩種情形來說明：

(1) 當$\angle A$爲銳角，如下列的兩圖形，



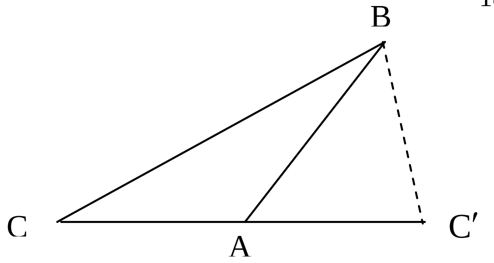


直接作$\overline{AC}$邊上的高$\overline{BD}$，因爲ΔABD爲直角三角形，所以

$\overline{BD} = \overline{AB} \times \sin A$，因此$\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \dfrac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AB} \times \sin A$。

(2) 當$\angle A$為鈍角，如右圖，

則延長$\overline{CA}$，且取$\overline{AC'}=\overline{AC}$，



再連接$\overline{BC'}$，所以，由$\Delta ABC=\Delta ABC'$(面積相等)，且

$\angle BAC'=180^\circ-\angle BAC$，因此

$$\Delta ABC=\Delta ABC'=\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{AB}\times\sin\angle BAC'$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin(180^\circ-\angle BAC)$$

從上面的說明，我們知道：

若ΔABC的兩邊長分別為 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，且夾角為$\angle A$，那麼$\Delta ABC=\dfrac{bc\sin A}{2}$。

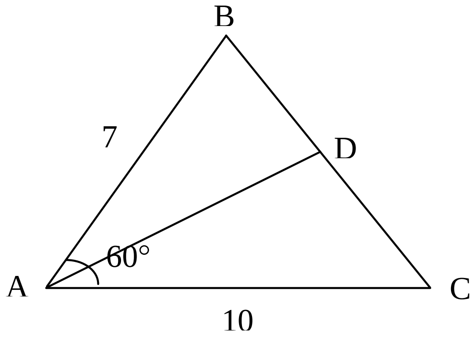
【範例 1】已知ΔABC中，$\overline{AC}=10$，$\overline{AB}=7$，$\angle A=60^\circ$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$交$\overline{BC}$於 D，求：(1) ΔABC的面積。 (2) $\overline{AD}$的長。

【解】 (1) $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times10\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{35}{2}\sqrt{3}$



(2) 設 $\overline{AD}=x$。

$\because\ \Delta ADB+\Delta ADC=\Delta ABC$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\angle BAD+\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin\angle CAD=\dfrac{35}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4}\cdot 17\cdot x=\frac{35}{2}\sqrt{3}$$

$$x=\frac{70}{17}\sqrt{3}$$

【類題練習 1】已知ΔABC中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$交$\overline{BC}$於 D，若$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，求$\overline{AD}$的長。

【想想看】(1) 我們知道在直角三角形中，若已知兩股的長分別爲 a、b，則它的面積爲$\frac{ab}{2}$。事實上，這兩股的夾角爲90°，那麼由上面的面積公式，我們能說$\sin 90^{\circ}=1$嗎？

(2) 如果(1)的說法是對的，那麼$\cos 90^{\circ}$會等於 0 嗎？

我們來看這個面積公式的一個應用。

【範例 2】 ΔABC中，D、E 分別爲$\overline{AB}$、$\overline{AC}$邊上兩點，試說明

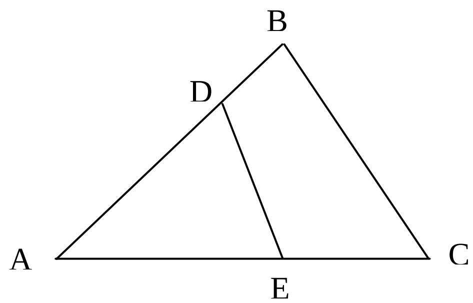
ΔABC的面積：ΔADE的面積$=\overline{AB}\times\overline{AC}$：$\overline{AD}\times\overline{AE}$。

【解】 由面積公式，我們知道

ΔABC的面積$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$，

而ΔADE的面積$=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A$，

所以，



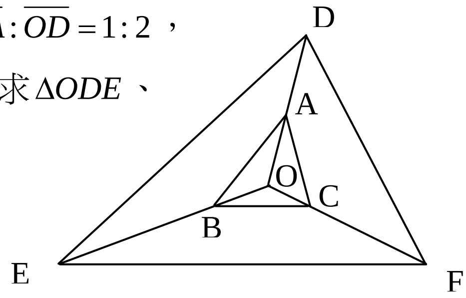
ΔABC的面積：ΔADE的面積

$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$：$\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A$。

約去$\frac{1}{2}\sin A$後，即可得到

ΔABC的面積：ΔADE的面積$=\overline{AB}\times\overline{AC}$ ：$\overline{AD}\times\overline{AE}$ 。

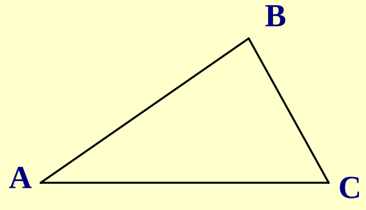
【類題練習 2】如右圖，O 爲ΔABC的重心，$\overline{OA}:\overline{OD}=1:2$，$\overline{OB}:\overline{OE}=1:3$，$\overline{OC}:\overline{OF}=1:4$，求$\Delta ODE$、$\Delta OEF$、$\Delta OFD$的面積比。



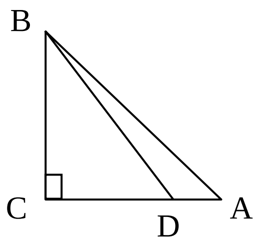
【重點整理】

1. 直角三角形中，若已知一銳角及任一邊長，即可求出另兩邊的邊長。
2. 在ΔABC中，如右圖，

$$
\begin{aligned}
\Delta ABC\text{的面積}&=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A\\
&=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BA}\times\sin B\\
&=\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CB}\times\sin C
\end{aligned}
$$
。



【家庭作業】



1. 如右圖，$\angle C = 90°$，$\angle BAC = 45°$，$\angle BDC = 60°$，若$\overline{AD} = 10$，求$\overline{DC}$、$\overline{BC}$的長。

2. 已知ΔABC中，$\overline{AC} = 12$，$\overline{AB} = 8$，$\angle A = 60°$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$交$\overline{BC}$於 D，求$\overline{AD}$的長。

3. 如右圖，設 O 爲ΔABC的重心，$\overline{OD} : \overline{DA} = 1:2$，$\overline{OE} : \overline{EB} = 2:3$，$\overline{OF} : \overline{FC} = 3:4$，求$\Delta ODE$、$\Delta OEF$、$\Delta OFD$的面積比。