A4　平面幾何的基本性質

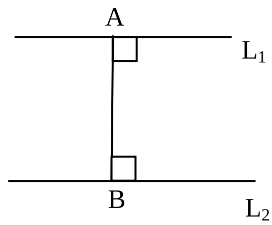
高中一年級的數學課程中，雖然沒有「幾何」的章節，但是，在許多課程內容中，需要具備一些幾何基本概念；又如：在某些三角函數的推導過程中，也涉及幾何知識。因此，在本節中，我們將平面幾何中有關平行、三角形、四邊形和圓的基本概念和性質，分別條列如下，以做為同學們複習的參考。

1. 平行

【定義】在平面上垂直於同一條直線的兩條直線稱為平行線。

如右圖，L_1與L_2互相平行(或稱L_1與L_2是平行線)，

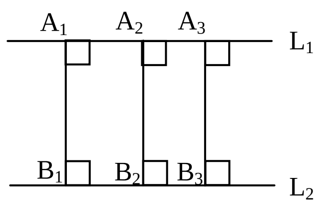
並記作：$L_1//L_2$，且$\overline{AB}$的長度就是L_1與L_2的距離。



【基本性質】

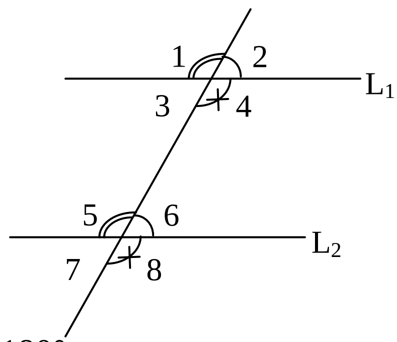
（1）一線段若垂直於平行線中的一條直線，
　　必垂直於平行線中的另一條直線。

（2）兩平行線間的距離處處相等。
　　如右圖：$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3}$



（3）平行線永遠不相交。

（4）$L_1//L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1與L_2被一直線所截，
　　且同位角相等。
　　如右圖：$\angle 1=\angle 5$、$\angle 2=\angle 6$、
　　$\angle 3=\angle 7$、$\angle 4=\angle 8$。



（5）$L_1//L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1與L_2被一直線所截，
　　且同側內角互補。
　　如右圖：$\angle 3+\angle 5=180°$、$\angle 4+\angle 6=180°$。

（6）$L_1//L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1與L_2被一直線所截，
　　且內錯角相等。
　　如右圖：$\angle 3=\angle 6$、$\angle 4=\angle 5$。

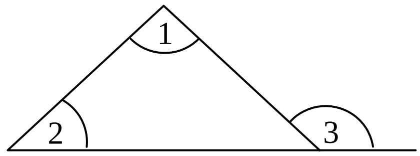
【想想看】(1) ∠1 是否等於∠8？

(2) ∠4 與∠6 的角平分線是否垂直？

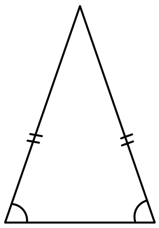
2. 三角形

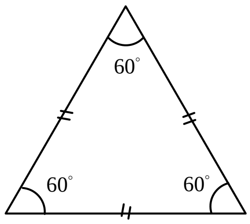
【基本性質】

1. **內角和性質**：任意一個三角形的三個內角和等於 180°。
2. **外角和性質**：任意一個三角形的三個外角和等於 360°。
3. **外 角 性 質**：三角形的任一外角等於其兩個內對角的和。如右圖：∠3= ∠1+ ∠2。



4. 等腰三角形的兩底角相等，正三角形的三個內角相等。

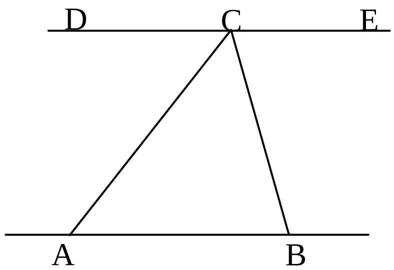




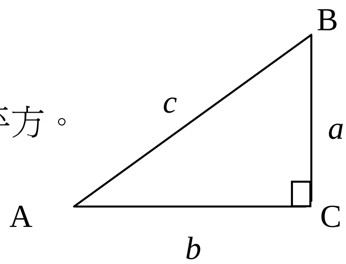
【想想看】（1）如右圖，已知 $\overline{DE} // \overline{AB}$。你能否推導出 ΔABC 的內角和為 180°？

（2）三角形若不是正三角形，是否一定有一個內角大於 60°？

（3）鈍角三角形的三內角都是鈍角嗎？



5. <u>商高定理</u>（又稱為**畢氏定理**）：
直角三角形的兩股的平方和等於斜邊的平方。
如右圖：$a^2+b^2=c^2$。

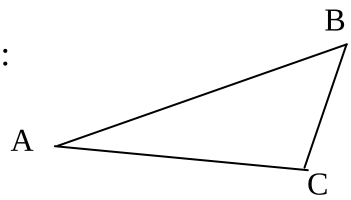


【想想看】（1）如果三角形的三邊長 a、b、c 滿足 $a^2+b^2<c^2$，則 $\angle C$______ 90°。（填>,=,<）

（2）如果三角形的三邊長 a、b、c 滿足 $a^2+b^2>c^2$，則 $\angle C$______ 90°。（填>,=,<）

（3）欲判斷三角形爲銳角三角形必須檢查哪些條件？

6. 三角形的任意兩邊和大於第三邊。
7. 三角形的兩邊及其對應的角有下列關係：大邊對大角；大角對大邊。



如右圖：若 $\overline{AB}>\overline{BC}$，則 $\angle C>\angle A$；反之,若 $\angle C>\angle A$，則 $\overline{AB}>\overline{BC}$。

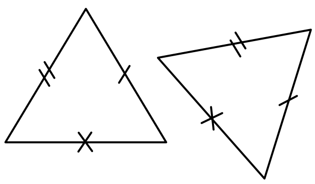
3. 三角形的全等

【定義】如果兩個三角形的對應邊相等，對應角相等，則稱這兩個三角形全等。

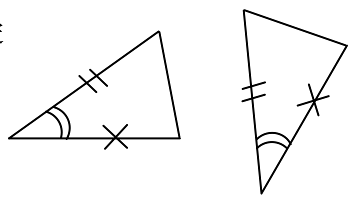
【基本性質】

1. 全等性質：SSS、SAS、AAS、ASA、RHS

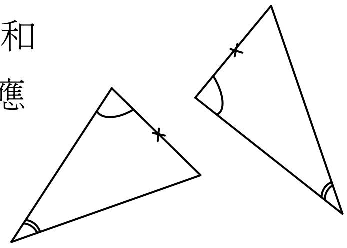
（1）SSS 全等性質：如果兩個三角形的三個邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



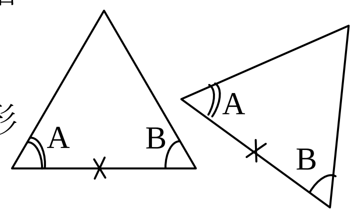
（2）SAS 全等性質：如果兩個三角形的兩邊和它們的夾角分別對應相等，則這兩個三角形全等。



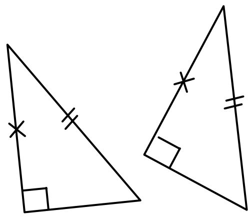
（3）AAS 全等性質：如果兩個三角形有兩角和其中一角的對邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



（4）ASA 全等性質：如果兩個三角形有兩角和這兩個角的夾邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



（5）RHS 全等性質：如果兩個直角三角形的斜邊和一股分別對應相等，則這兩個直角三角形全等。



【想想看】爲什麼沒有三角形 AAA、SSA 的全等性質？

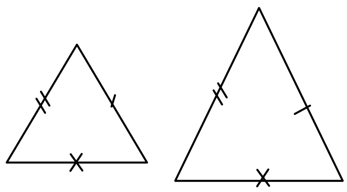
4. 相似三角形

【定義】 兩個三角形不論其大小是否相等，只要形狀相同就稱爲相似三角形。

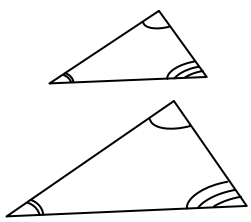
【基本性質】

1. SSS、AAA、AA、SAS 相似性質：

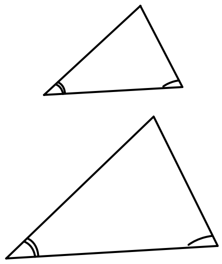
（1）SSS 相似性質：如果兩個三角形三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。



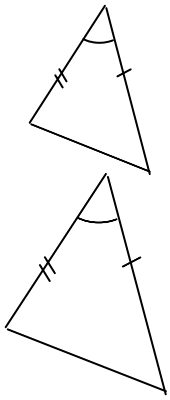
（2）AAA 相似性質：如果兩個三角形的三組對應角相等，則這兩個三角形相似。



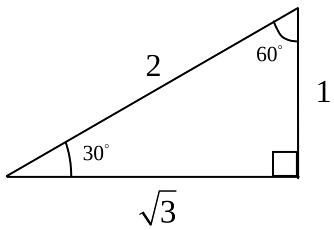
（3）AA 相似性質：如果兩個三角形的二組對應角相等，則這兩個三角形相似。



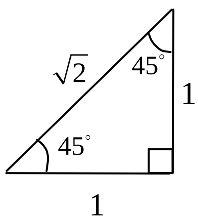
（4）SAS 相似性質：如果兩個三角形有一組角對應相等，且夾此角的兩組對應邊長成比例，則這兩個三角形相似。



2. （1）三內角分別爲 30°、60°、90°的三角形，其對應邊邊長比爲 $1:\sqrt{3}:2$。

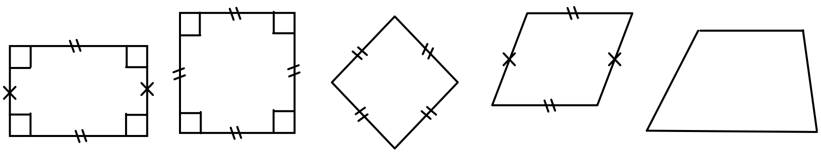


（2）三內角分別爲 45°、45°、90°的三角形，其對應邊邊長比爲 $1:1:\sqrt{2}$。



5. 四邊形

【圖形與定義】



長方形　正方形　菱形　平行四邊形　梯形

長方形（矩形）：四個角都是直角的四邊形稱爲長方形；如果一個長方形的四邊都等長就稱爲正方形。

菱　　　　形：四邊都等長的四邊形稱爲菱形。

平 行 四 邊 形 ：有兩雙平行邊的四邊形稱爲平行四邊形。

梯　　　　形：一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱爲梯形。

等 腰 梯 形 ：不平行的對邊等長的梯形稱爲等腰梯形。

【想想看】(1) 菱形一定是平行四邊形嗎？

(2) 正方形一定是菱形嗎？

【基本性質】

- 平行四邊形：

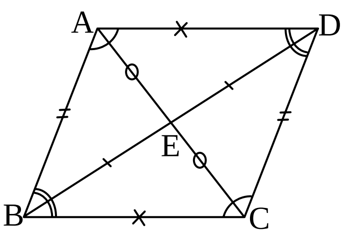
（1）平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。

如右圖：ΔABC 與 ΔCDA 全等，ΔABD 與 ΔCDB 全等

（2）平行四邊形的兩組對角分別相等。

如右圖：$\angle ABC = \angle ADC$、

$\angle BAD = \angle BCD$。



（3）平行四邊形的兩組對邊分別相等。

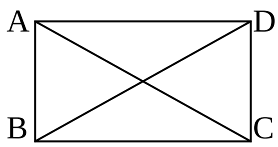
如右圖：$\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

（4）平行四邊形的對角線互相平分。

如右圖：$\overline{AE} = \overline{CE}$ 、 $\overline{BE} = \overline{DE}$ 。

- 長方形：長方形的對角線長相等。

如右圖：$\overline{AC} = \overline{BD}$ 。



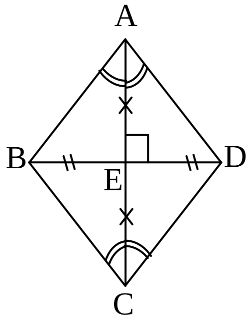
➢ 菱形：（1）菱形的對角線互相垂直平分。

如右圖：$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 互相垂直平分。

（2）菱形的對角線平分頂角。

如右圖：$\overline{AC}$ 平分 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$；

$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$。



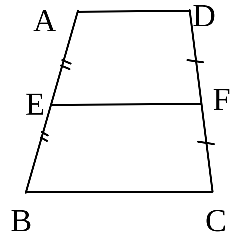
➢ 正方形：正方形既是長方形也是菱形中的一種。

➢ 梯形：

（1）梯形 $ABCD$，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，$\overline{EF}$ 稱為梯形 $ABCD$ 的中線。

如右圖：

則 $\overline{AD} \,//\, \overline{EF} \,//\, \overline{BC}$ ；$\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$。

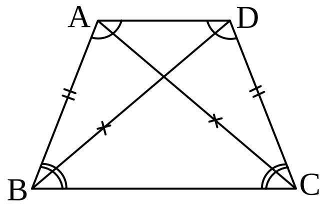


（2）等腰梯形的底角相等，對角線等長。

如右圖：$\angle ABC = \angle BCD$、

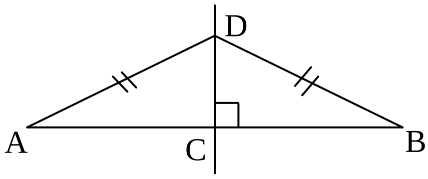
$\angle BAD = \angle ADC$、

$\overline{AC} = \overline{BD}$ 。



6. 線的性質

【基本性質】



1. **中垂線性質**：

一線段的中垂線上任意一點到此線段的兩端點等距離；

與一線段的兩端點等距離的任何點必在此線段的中垂線上。

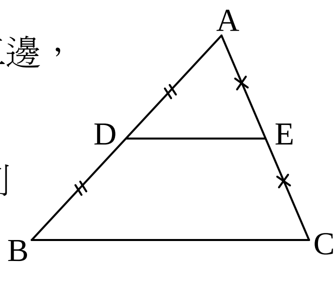
2. **兩邊中點連線性質**：

連接三角形的兩邊中點的線段必平行於第三邊，

且長度為第三邊的一半。

如圖：若 D、E 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的中點，則

$\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 。

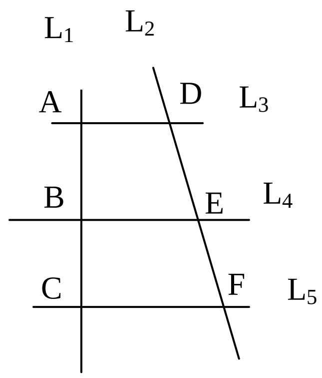


3. 平行線截比例線段性質：

如圖：若二直線L_1、L_2

被三條平行線L_3、L_4、L_5所截，

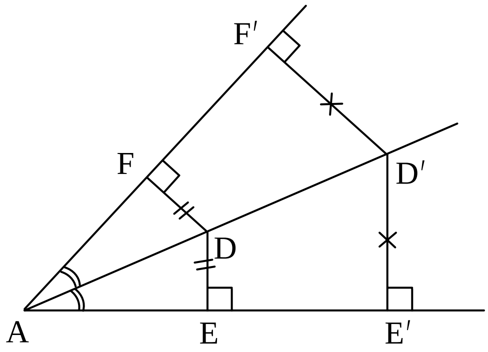
則$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$。



4. 角平分線性質：

角平分線上的任何一點到角的兩邊等距離；

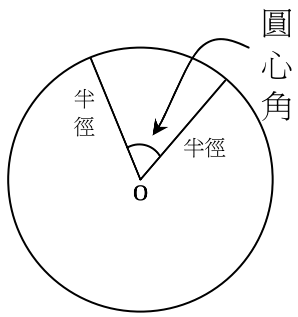
到角的兩邊等距離的任何一點必在角平分線上。



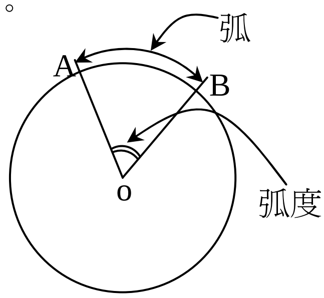
7. 圓

【定義與基本性質】

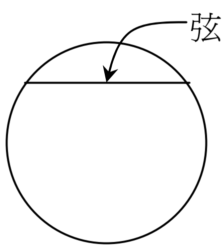
1. 圓心角：以圓心爲頂點，兩個半徑爲邊的角稱爲圓心角。（取較小的角）



2. 弧度：弧度等於該弧所對應的圓心角度數。



3. 弦：連接圓周上兩點所成的線段。

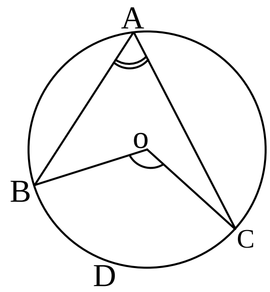


4. 圓周角：以圓周上的點爲頂點，

兩個弦爲邊的角稱爲圓周角。

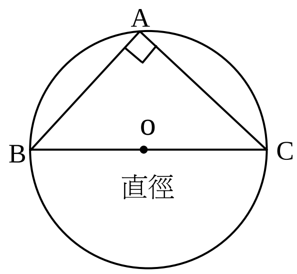
- 圓周角等於該角所對弧度數的一半。

  如圖：$\angle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BDC}$



- 半圓所對應的圓周角是直角。

  如圖：$\angle BAC = 90°$

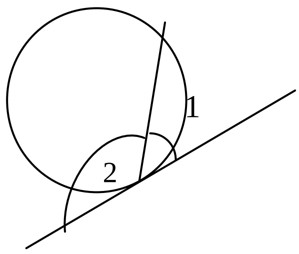


5. 弦切角：圓的一條弦和一條切線相交於切點

所形成的角。

如圖：$\angle 1$、$\angle 2$ 均爲弦切角。

- 弦切角的度數等於角的兩邊所夾弧度數的一半。

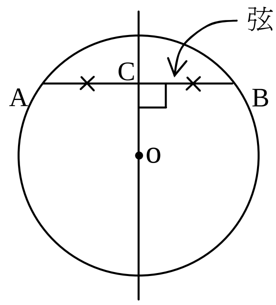


6. 圓心與弦的關係：

- 過圓心且與弦垂直的直線，

  必平分此弦，如圖：$\overline{AC} = \overline{BC}$ 。

- 垂直且平分此弦的直線必過圓心。



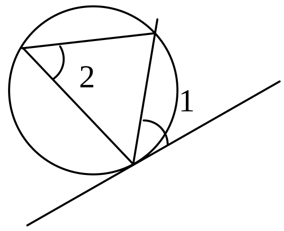
7. 弦心距：弦與圓心的距離叫做此弦的弦心距，

如圖：弦心距＝$\overline{OC}$ 。

【想想看】 (1) 已知四邊形 $ABCD$ 有一外接圓，是否能由圓周角推導出四邊形 $ABCD$ 內角和爲 360°？

(2) 弦切角與對應此弧的圓周角是否相等？

如右圖：$\angle 1$ 是否等於 $\angle 2$？



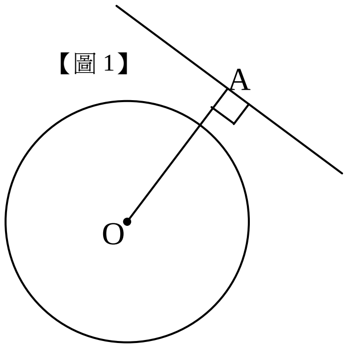
8. 點與圓

【基本性質】

平面上的點與圓之間有下列三種關係：

1. 點在圓外：點到圓心的距離＞半徑。
2. 點在圓上：點到圓心的距離＝半徑。
3. 點在圓內：點到圓心的距離＜半徑。

【圖 1】



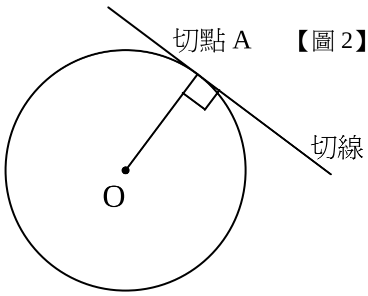
9. 圓與直線

【基本性質】

平面上的直線與圓有下列三種關係：

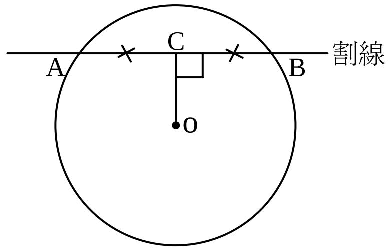
1. 直線與圓不相交：直線與圓心的距離＞半徑。(如圖1)
2. 直線與圓只有一交點：直線與圓心的距離=半徑。(如圖2)
   - 我們稱這條直線為這個圓的**切線**，它們的交點稱為**切點**。
   - 過一圓直徑端點的垂線為此圓的切線。
   - 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
   - 圓心與切點的連線必垂直過切點的切線。

【圖 2】



3. 線與圓有兩交點：直線與圓心的距離＜半徑。(如圖 3)
   - 我們稱這條直線為這個圓的**割線**。

【圖 3】



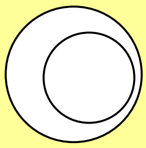
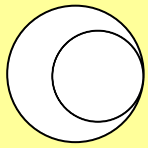
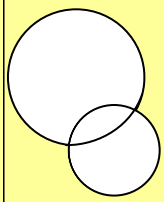
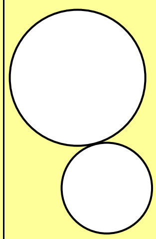
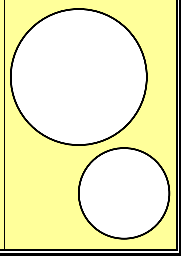
【想想看】（1）過圓上一點能做幾條切線？
（2）過圓外一點能做幾條切線？

10. 圓與圓

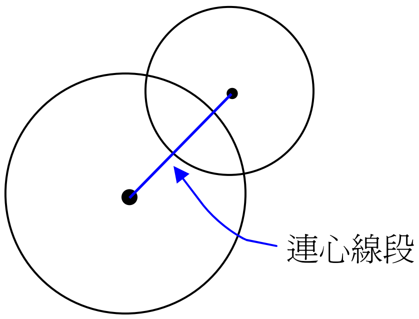
【基本性質】

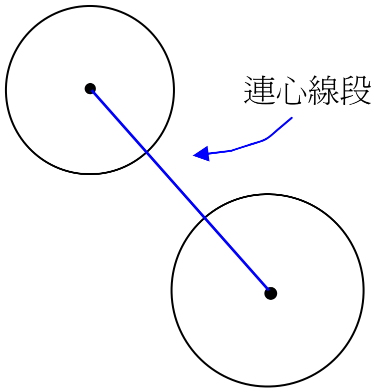
1. 兩圓關係：兩圓的位置關係有三種：
   - 兩圓不相交（外離、內離）
   - 相交於一點 (內切、外切)

➢ 相交於二點

兩圓關係	內離	內切	相交於二點	外切	外離
圖 示					

2. 連 心 線：在平面上兩圓的圓心所連結的直線稱爲連心線。
3. 連心線長：兩圓的圓心所連結的線段長稱爲連心線長。

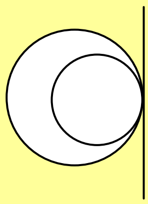
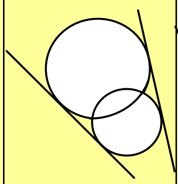
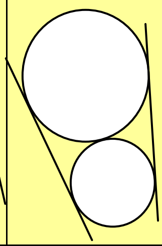
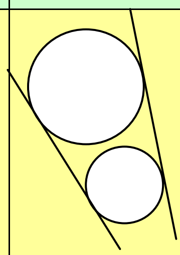
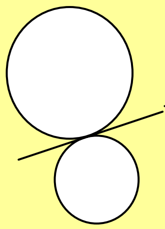
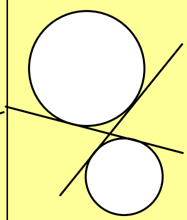




4. 連心線長與兩圓關係如下：

兩圓關係	連心線長與半徑關係
內離	0≤連心線長＜半徑的差
同心圓	連心線長＝0
內切	連心線長＝半徑的差
相交於兩點	半徑的差＜連心線長＜半徑的和
外切	連心線長＝半徑的和
外離	連心線長＞半徑的和

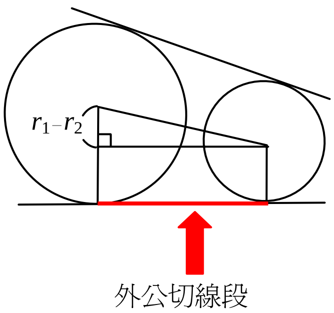
5. 公切線：與兩圓同時相切的直線稱爲此兩圓的公切線。

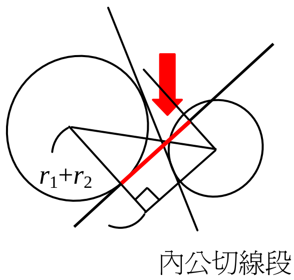
兩圓關係	同心圓	內離	內切	相交於二點	外切	外離
外公切線	無	無				
內公切線	無	無	無	無		

6. 公切線長：兩圓的圓心O_1、O_2，半徑r_1、r_2。

$$\text{外公切線長}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$$

$$\text{內公切線長}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$$



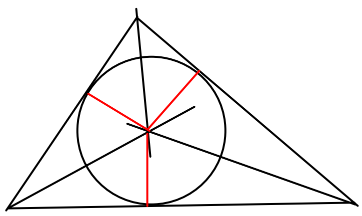


11. 三角形與圓

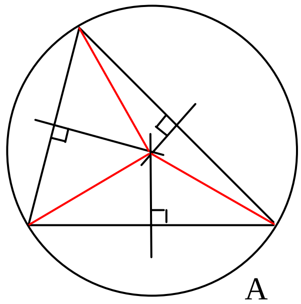
【定義與基本性質】

1. 內心

- 何謂內心：三角形內切圓的圓心。
- 如何求出：三角形三內角平分線交於一點，此點就是**內心**。
- 相關性質：
  - 內心到三邊等距離。
  - 三角形恰有一內切圓。



2. 外心



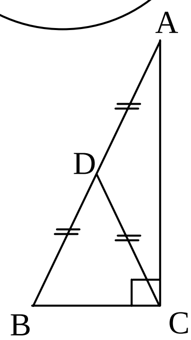
✧何謂外心：三角形外接圓的圓心。

✧如何求出：三角形三邊的中垂線交於一點，

此點就是**外心**。

✧ 相關性質：

- ➢ 外心到三頂點等距離。
- ➢ 三角形恰有一外接圓。
- ➢ 直角三角形的外心在斜邊中點。



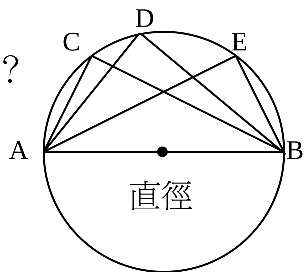
如圖：直角三角形 ΔABC 中，

D 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$ 。

【想想看】（1）已知圓 O 為 ΔABC 的外接圓，利用圓周角性質，

推導三角形內角和為 180°。

（2）直角三角形的斜邊是否為其外接圓的直徑？



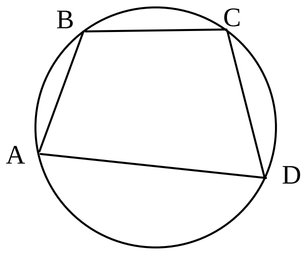
（3）如右圖，為什麼 ΔABC 、 ΔABD 和 ΔABE

都是直角三角形？

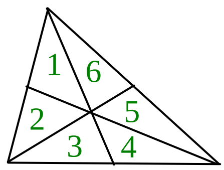
（4）如圖：已知圓 O 為四邊形 $ABCD$ 的

外接圓，為什麼 $\angle A$ 與 $\angle C$、

$\angle B$ 與 $\angle D$ 互補？



3. 重心



✧ 如何求出：三角形的三中線交於一點，此點

就是**重心**。

✧ 相關性質：

- ➢ 重心到一頂點的距離等於過此頂點的中線的2/3倍。
- ➢ 三角形的三中線將此三角形分為六個面積相等的三角形，如圖中的六個小三角形的面積都相等。
- ➢ 均勻的三角板的重心就是它們的質量中心。