A3　不等式與集合

A3-1 不等式的解與集合

什麼是不等式的解？

凡是使得不等式成立的數，都是這個不等式的解。

以一元一次不等式為例，凡是小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數都能使得不等式$2x-1\leq 0$成立，而且也只有這些小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數才能滿足此不等式。此時要注意，當我們提到不等式的解時，並不是對某個單一特定的解而言，而是指它所有的解。所以，不等式$2x-1\leq 0$的解就是指所有「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數」。在國中時，我們把原不等式$2x-1\leq 0$化為$x\leq\frac{1}{2}$的形式，並以它來表示$2x-1\leq 0$的解，並賦予數學式$x\leq\frac{1}{2}$兩層涵意：它除了表示一個不等式外，又代表這個不等式的所有解。

在某些情境之下，我們可能會進一步的要求這些解必為整數，因此必須用「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」來表述這些解。在此，不難發現只用文字來敘述不等式的解會有其不便性。當然也可以把不等式的所有解一一列出：0、-1、-2、-3、-4、$\cdots$。這種表示法有點混淆不清，這是因為每個人對其中的「$\cdots$」可能有著不同解讀方式。所以，我們應避免這一種方式，儘管大家都可能看出這些已列出的數字所要表達出的規律。另一方面，並不是所有的東西都可以用一一列出的形式來呈現。

除了用文字敘述之外，在數學上是否有其它較為簡便的方式來描述它呢?

在高中階段，我們所要學習的數學概念及對象已經不再侷限於數字。因此，在陳述新的概念及對象時，我們為了避免冗長的敘述和語意的混

淆不清，我們將逐步引用康托（Cantor）所建立的集合概念。根據康托的說法，當我們能把一些清晰可分的、客觀的世界中，或我們思想中的事物看成「一體」時，這個整體便稱爲「**集合**」(Set)。我們稱集合中的事物爲它的「**元素**」，如果x是集合S的元素，便用符號$x \in S$（讀作x**屬於**S）表示；若x不是S的元素，則以$x \notin S$（讀作x**不屬於**S）表示；不包含任何元素的集合稱爲「**空集合**」，並記作$\varnothing$。例如，我們可以把「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」這些數當成一個集合S。集合S的元素就是0，-1，-2，-3，-4、…這些數字。當然，我們也可以符號$0 \in S$、$-1 \in S$、$-2 \in S$、$-3 \in S$、…來陳述這一件事；另一方面，可以用$1 \notin S$、$2 \notin S$、$3 \notin S$、$4 \notin S$、…來表示所有的自然數並不在集合S裡面。

【類題練習 1】已知$A = \{1, 2, 5\}$，下列何者正確？

(1) $2 \in A$　(2) $3 \notin A$　(3) $5 \in A$

現在來看如何以集合的語言，來敘述「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」呢？

(1) $\{0, -1, -2, -3, -4, \cdots\}$；

(2) $\{x \mid x$ 爲小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數$\}$；

(3) $\{x \mid x \le \frac{1}{2}$ 且 x 爲整數$\}$、$\{x \mid x \le \frac{1}{2}$ 且 $x \in Z\}$或$\{x \in Z \mid x \le \frac{1}{2}\}$。

首先，來看這幾種表示法的差異。將所有的元素以(1)的形式在括弧$\{\ \ \}$中表列出來，並稱此方法爲集合的**表列法**。當使用表列法列舉元素時，元素之間並沒有一定的排序，而且元素也可以重複列舉。例如，由a、b和c所構成的集合可以用$\{a, b, c\}$、$\{b, c, a\}$、$\{a, b, c, c, a\}$等來表示。我們已在前面說明了(1)中的$\{0, -1, -2, -3, -4, \cdots\}$這種表示法的缺失。倘若，一個集合有很多元素（或甚至有無窮多個元素）時，我們不方便或者甚至根本

無法全數列舉時，則可採用如(2)或(3)的方式，以集合中元素的共同的特性來表示（稱爲**構造法**）。(3)中的表示法是使用較多的數學符號來陳述，例如，用 $x \le \frac{1}{2}$ 來取代文字敘述 x 爲小於 $\frac{1}{2}$ 或等於 $\frac{1}{2}$，並用 $x \in Z$ 來取代文字敘述 x 爲整數。

【類題練習 2】已知 $A = \{ x \mid x \le 2$，且 $x \in Z \}$，下列何者正確？

(1) $2 \in A$　(2) $-3 \notin A$　(3) $0.5 \in A$

在此，不難看出使用集合符號的便利性。在解方程式或不等式時，除了可用集合的語言來表示方程式或不等式的解外，也可以用集合的概念來輔助解題。我們將舉一些例子來說明這一概念。如果集合 A 中的每一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的「**子集**」，並記作 $A \subset B$（讀作 A **包含於** B）或 $B \supset A$（讀作 B **包含** A）。如果進一步，我們又知道 B 中的每一個元素也都屬於 A，也就是說 A 與 B 兩集合由相同的元素所構成，那麼我們就說 A、B 兩集合相同(或相等)，並記作 $A = B$。例如，

$\{0, -1, -2, -3, -4, \cdots\} = \{ x \mid x$ 爲小於 $\frac{1}{2}$ 或等於 $\frac{1}{2}$ 的整數$\}$。

【想想看】對集合 A，我們能說 $A \subset A$ 嗎？

如果所探討的集合都爲某個給定集合 $\boldsymbol{U}$ 的子集，則稱集合 $\boldsymbol{U}$ 爲**宇集**。一般來說，在解方程式或不等式時，我們會考慮所有的實數解，此時就可以取所有的實數 $\boldsymbol{R}$ 爲宇集；如果我們只考慮整數解時，那麼就可以取所有的整數 $\boldsymbol{Z}$ 爲宇集。

注意，我們要仔細區分 $1 \in A$ 及 $\{1\} \subset A$ 兩個符號的差異。前者是說 1 是集合 A 的一個元素，而後面者是指集合$\{1\}$是集合 A 的一個子集合。當然這兩個概念是可以互推的。值得一提的是：$1 \subset A$ 是一個錯誤的表示法，這是因爲 1 不是一個集合，所以它不能是集合 A 的子集；另一方面，可能會看到$\{1\} \in A$這一個表示法，但是在高中的數學課程裡並不討論此一情形。

【重點整理】

1. 當我們能把一些事物看成「一體」時，這個整體稱爲集合，且稱集合中的事物爲它的元素。
2. 若 a 是集合 A 的元素，稱 a 屬於 A，記作 $a\in A$；反之，就稱 a 不屬於 A，記作 $a\notin A$。
3. 如果集合 A 中的每一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的子集，且說 A 包含於 B，並記作 $A\subset B$，或者說 B 包含 A，並記作 $B\supset A$。
4. 集合可以用表列法或構造法來表示。

【家庭作業】

基礎題

1. 已知 $T=\{1,3,4,6\}$，下列何者正確？

   ① $2\in T$　② $3\notin T$　③ $4\in T$　　答案爲________

2. 請依據集合的定義，將 N、R、Q、Z 填入下列空格：

   ① ________$=$\{所有的自然數\}　② ________$=$\{所有的整數\}

   ③ ________$=$\{所有的有理數\}　④ ________$=$\{所有的實數\}

3. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，請將集合 A 以表列法表示。

4. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，$C=\{1, 3, 5, 6\}$，以包含於$\subset$、或包含$\supset$符號表示下列集合之間的包含關係：

   ① A ______ B　② B ______ A

   ③ C ______ A　④ B ______ C

進階題

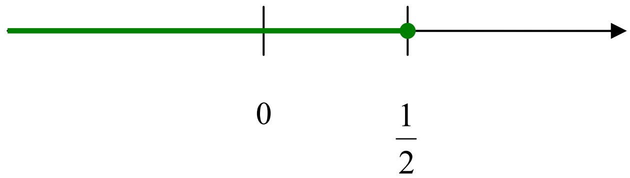
5. 已知 $\{1, 2, 3\}\subset A\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$，請寫出所有滿足這個包含關係的集合 A。

A3-2　一元一次不等式

在本單元裡，我們將學習如何解形如下列的不等式

$$3x-2>4、3x-1\geq 5x-3、$$
$$2x<3x-5<13、|x-1|<5 \text{ 或 } |2x-1|>3。$$

在學習解不等式之前，我們以 $2x-1\leq 0$ 爲例來複習如何使用數線來圖示不等式的解。

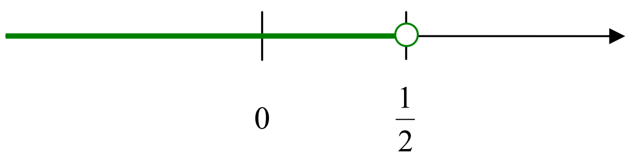


在上圖中，我們以圓點「•」來表示坐標爲$\frac{1}{2}$的點在這個不等式解的範圍內。因爲數線上的綠色部分的點所表示的數都小於或等於$\frac{1}{2}$，所以可用綠色部分來圖示不等式 $2x-1\leq 0$ 所有解的範圍。

【範例 1】在數線上圖示不等式的所有解：

(1)　$2x<1$　　　　(2)　$2x\geq 1$

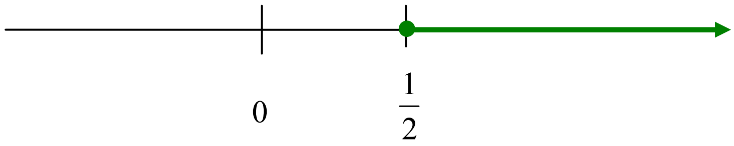
【解】　(1) 因爲不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\leq 1$ 解的差異，在於$\frac{1}{2}$不是前者的解，所以不等式 $2x<1$ 的圖示(下圖)與上圖類似，並以圓圈「○」來表示坐標爲$\frac{1}{2}$的點不在這個不等式 $2x<1$ 解的範圍內。



我們可以用集合$\{x \mid x<\frac{1}{2}\}$來表示不等式 $2x<1$ 的解。

(2)　因爲由三一律知道，不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\geq 1$ 不能有共同的解，並且任意一個數一定是其中某個不等式的解，

所以不等式 $2x \geq 1$ 的解可圖示如下：



我們可以用集合$\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\}$來表示不等式 $2x \geq 1$ 的解。

從上面的例子，我們知道：集合$\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\}$與集合$\{x \mid x < \frac{1}{2}\}$沒有任何共同的部份，像這樣的兩個集合稱為互斥。

另一方面，就如前面所提到，因為由三一律知道，不等式 $2x < 1$ 與不等式 $2x \geq 1$ 不能有共同的解，並且任意一個數一定是其中某個不等式的解。為了方便說明，我們將不等式 $2x < 1$ 與不等式 $2x \geq 1$ 的解分別用集合 A、集合 B 來表示。因為 A、B 都是實數 $\boldsymbol{R}$ 的子集，所以在這裡，我們取 $\boldsymbol{R}$ 為宇集。只要將宇集 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}$ 中所有屬於集合 A 的元素去掉後，所剩下的就是集合 B，這就是集合 A 的**餘集**(或稱為**補集**)的概念。

其實，我們可以把補集的概念推廣到下面的情形：對於任意兩集合 A、B，若將 A 中所有屬於 B 的元素去掉後所形成的集合則稱為 A 對 B 的「**差集**」，並記作 $A-B$，即：

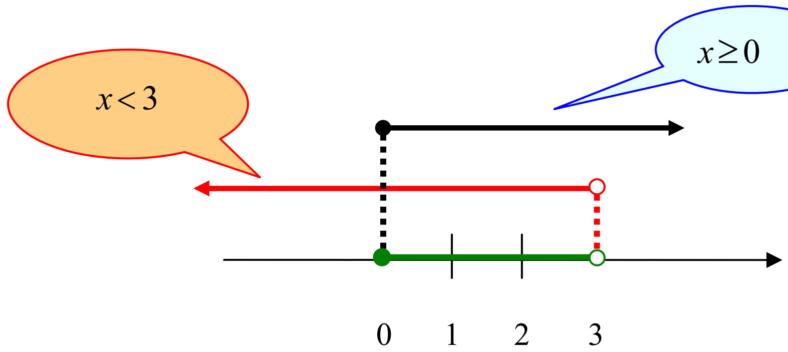
$$A-B=\{x \mid x \in A，但 x \notin B\}$$

也就是說，我們將 A 的餘集(或稱補集)就是 $\boldsymbol{U}$ 對 A 的差集，記作 $\overline{A}=\boldsymbol{U}-A$。在前面的例子中，不等式 $2x<1$ 的解集合 A 的餘集就是不等式 $2x \geq 1$ 的解集合 B，至於 $A-B=A$，$B-A=B$。

【類題練習 1】在數線上圖示下列不等式：

(1) $x \geq 3$ (2) $x < 2$ (3) $x > -3$ (4) $x \leq 4$

我們再以另一個不等式 $0\leq x<3$ 爲例：因爲不等式 $0\leq x<3$ 即表示 $0\leq x$ 和 $x<3$ 兩個不等式同時成立，所以，$0\leq x<3$ 解的圖示爲下圖中的綠色部分，也就是 $x\geq 0$ 和 $x<3$ 解的圖示重疊的部分。



上圖中的綠色部分即爲$\{x\,|\,x\geq 0\}$與$\{x\,|\,x<3\}$兩個集合的共同部分。這就是集合的交集概念：對於任意兩個集合 A、B，由 A 與 B 所有共同的元素所形成的集合稱爲 A 與 B 的「**交集**」，並記作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{\,x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}\text{。}$$

所以，可以用$\{x\,|\,x<3\}\cap\{x\,|\,x\geq 0\}$來表示$\{x\,|\,x<3\}$與$\{x\,|\,x\geq 0\}$的交集。我們知道在交集中的任何一個數一定是大於或等於0，並且小於3，反之亦然，因此，$\{x\,|\,x<3\}\cap\{x\,|\,x\geq 0\}$、$\{x\mid x\geq 0 \text{ 且 } x<3\}$這兩個集合相同。所以，這個交集也可以用$\{x\mid x\geq 0 \text{ 且 } x<3\}$來表示，也因此，可以用$\{x\,|\,0\leq x<3\}$來表示。

若集合 A 與 B 的交集不爲空集合，也就是 $A\cap B\neq\varnothing$，則稱 A 與 B 相交；否則稱爲 A 與 B 互斥。例如，前面所提到的$\{x\mid x\geq\frac{1}{2}\}$與$\{x\mid x<\frac{1}{2}\}$互斥。同樣的，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4\}$，那麼 $A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$，所以 A 與 B 相交；而 $A\cap C=\varnothing$，所以 A 與 C 互斥。事實上，在解聯立二元一次方程組時，就已經使用到交集的概念了。例如在方程組 $x=0$、$y=0$ 中，我們知道二元一次方程式 $x=0$、$y=0$ 解的圖形分別爲 y 軸、x 軸。因爲這二個方程式要同時成立，所以要找出 x 軸與 y 軸共同的部份。當然，它的解就是原點(0, 0)。在這裡可以把 x 軸與 y 軸看成兩個集合，而原點正是它們的交集。

【類題練習 2】在數線上圖示下列不等式：

(1) $-2<x<2$　　　　(2) $-3\le x<1$

【解不等式 $ax+b>c$】

如何解形如 $ax+b>c$ 的不等式呢？（其中 a、b、c 為常數）

在學習解不等式之前，我們先複習常出現在解題過程中幾個不等量的基本推論：當 $a>b$ 時，

推論 1：對任意數 c，我們恆有 $a+c>b+c$、$a-c>b-c$；

推論 2：對任意正數 $c>0$，我們恆有 $ac>bc$、$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；

推論 3：對任意負數 $c<0$，我們恆有 $ac<bc$、$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

此外，對於不等號「$<$」、「$\ge$」和「$\le$」，上述的推論也都成立。我們可引用推論 1~3 來改寫不等式，並將原不等式化簡而改寫成形如

$x>a$、$x<a$、$x\ge a$ 或 $x\le a$

的**最簡不等式**。從化簡的過程中，我們觀察到，原不等式的解就是使得化簡後所得的最簡不等式成立的所有數。

我們以下面的例子來說明上述的方法。

【範例 2】 解下列不等式：

(1) $3x-2>4$　　　　(2) $-5x+3\ge 5$

【解】 (1) $3x-2>4 \Rightarrow 3x-2+2>4+2$

$\Rightarrow 3x>4+2$

$\Rightarrow 3x>6$

$\Rightarrow x>2$

所以，不等式的解為所有大於 2 的數，並可用集合 $\{x \mid x>2\}$來表示。

(2) $-5x+3\geq 5 \Rightarrow -5x\geq 2$

$$\Rightarrow x\leq -\frac{2}{5}$$

所以，不等式的解為所有小於或等於 $-\frac{2}{5}$ 的數，並可用集合 $\{x \mid x\leq -\frac{2}{5}\}$ 來表示。

【類題練習 3】 解下列不等式：

(1) $4x+2\geq 7$　　　(2) $-3x-2<4$

【解不等式 $ax+b>cx+d$】

如何解形如 $ax+b>cx+d$ 的不等式呢？（其中 a、b、c 和 d 為常數）

【範例 3】 解不等式 $3x-1\geq 5x-3$。

【解】 $3x-1\geq 5x-3 \Rightarrow 3x-5x\geq -3+1$

$$\Rightarrow -2x\geq -2$$

$$\Rightarrow x\leq 1$$

所以，不等式的解為所有小於或等於 1 的數，並可用集合 $\{x \mid x\leq 1\}$ 表示。

【類題練習 4】 解下列各不等式：

(1) $7x-2<4x-5$　　　(2) $2x-4\leq 7-9x$

我們如何解形如 $2x<3x-5<13$ 此類合併形式的不等式呢？首先，我們需將這類的不等式改寫成某些不等式的組合，然後再利用前面所學的方法來解這些不等式。此時，原不等式的解就是這些不等式解的組合。

【範例 4】 解 $2x<3x-5<13$。

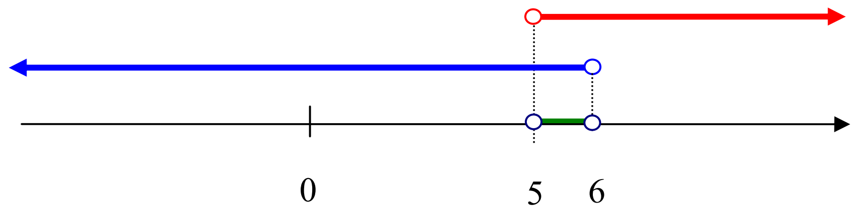
【解】 因為 $2x<3x-5<13$ 表示 $2x<3x-5$ 和 $3x-5<13$ 同時成立，因此，先將這兩組不等式分別化簡成最簡不等式後，再找出解的

共同部分：

$$\begin{array}{lll} \quad 2x<3x-5 & & \quad 3x-5<13 \\ \Rightarrow -x<-5 & 且 & \Rightarrow\ 3x<18 \\ \Rightarrow\ x>5 & & \Rightarrow\ x<6 \end{array}$$

因爲 $x>5$ 和 $x<6$ 必須同時成立，因此，原不等式的解爲所有大於 5 且小於 6 的數，並可用集合$\{x \mid x>5$ 且 $x<6\}$或用集合$\{x \mid 5<x<6\}$來表示。

我們也可在數線上圖示 $2x<3x-5<13$ 的解：將上面的結果分別標示在數線上，重疊的部分即爲答案：



所以，圖中綠色部分的線段即爲$\{x|x<6\}$與$\{x|x>5\}$的交集，也就是集合 $\{x|5<x<6\}$。

【類題練習 5】解 $4x\le 5x-3<17$。

解合併形式的不等式時，有時可將解題的過程合併在一起。

【範例 5】解 $-2<3x+4\le 8$。

【解】 方法一：因爲不等式$-2<3x+4\le 8$ 爲$-2<3x+4$ 及 $3x+4\le 8$ 的合併。因此，可先分別求不等式$-2<3x+4$ 及 $3x+4\le 8$ 的解，再找出它們共同的解。

$$\begin{array}{lll} -2<3x+4 \Rightarrow -2-4<3x & & 3x+4\le 8 \Rightarrow 3x\le 8-4 \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow -6<3x & 且 & \qquad\qquad\quad \Rightarrow 3x\le 4 \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow -2<x & & \qquad\qquad\quad \Rightarrow x\le \dfrac{4}{3} \end{array}$$

本題也可以把上面的過程合併如下：

方法二：

$$
\begin{aligned}
& -2 < 3x+4 \le 8 \\
\Rightarrow\ & -2-4 < 3x \le 8-4 \\
\Rightarrow\ & -6 < 3x \le 4 \\
\Rightarrow\ & -2 < x \le \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

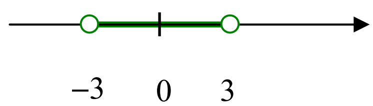
所以，由上面討論得知，不等式的解爲所有大於 -2 且小於 $\frac{4}{3}$ 或等於 $\frac{4}{3}$ 的數，並可用集合 $\{x \mid -2<x\le \frac{4}{3}\}$ 表示。

【類題練習 6】解下列不等式：

(1) $9 \ge 4x-2 \ge 7$　　　(2) $4 \le -3x-2 \le 8$

(3) $\frac{2}{5} \le \frac{5}{3}(x+6) < \frac{7}{2}$

接下來，我們來練習解含有絕對值的不等式。因爲可用 $|a-b|$ 來表示數線上 A(a)與 B(b)兩點的距離，並且 $|x|=3$ 可寫成 $|x-0|=3$，所以 $|x|=3$ 可表示在數線上與原點的距離爲 3 的點 P(x)。因此，x 可以等於 3 或 -3。同理，介於 -3 與 3 之間的任何一個數都能滿足不等式 $|x|<3$，也就是說，不等式 $|x|<3$ 的解即爲所有介於 -3 與 3 之間的數。因此，它的解可以圖示如下：



顯然的，對於任何一個正數 a，不等式 $|x|<a$ 的解即爲所有介於 $-a$ 與 a 之間的數，並可用集合 $\{x \mid -a<x<a\}$ 來表示。

其實，含有絕對值符號的不等式都可改寫成不含絕對值符號的不等式。如果這個新不等式爲一元一次式，我們就可用前面提到的方法來解原不等式。

【範例 6】 解下列不等式：

(1) $|x-1|\le 2$ (2) $|2x-1|<5$

【解】 (1) $|x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le x-1\le 2$

$\Rightarrow -2+1\le x\le 2+1$

$\Rightarrow -1\le x\le 3$

所以，不等式的解爲所有介於-1及 3 的數和-1、3 這兩個數，並可用集合$\{x \mid -1\le x\le 3\}$表示。

(2) 方法一：$|2x-1|<5 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -2<x<3$

方法二：$|2x-1|<5 \Rightarrow -5<2x-1<5$

$\Rightarrow -5+1<2x<5+1$

$\Rightarrow -4<2x<6$

$\Rightarrow -2<x<3$

因此，不等式的解爲所有介於-2 及 3 的數，並可用集合$\{x \mid -2<x<3\}$來表示。

在範例 6 第(1)題中，因爲 1 恰爲-1與 3 的中點，所以我們常用$|x-1|\le 2$來表示$-1\le x\le 3$。事實上，對於 $a\le x\le b$，我們也可用$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{b-a}{2}$來表示，其中$\frac{a+b}{2}$爲點 a 及點 b 的中點坐標，而$\frac{b-a}{2}$爲點 a 及點 b 距離的一半。

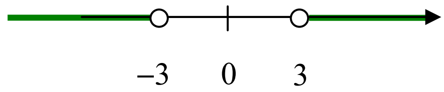
【類題練習 7】 回答下列各題：

(1) 解 $|4x-2|<7$ 。

(2) 若 $|x-m|\le n$的解爲 $2\le x\le 6$，求 m 、n 的值。

(3) 若 $|ax-b|<4$的解爲 $1<x<5$，求 a 、b 的值。

同前，任何一個大於 3 或小於 -3 的數都滿足不等式$|x|>3$，也就是說，不等式$|x|>3$的解爲所有大於 3 或小於 -3 的數。因此，它的解可圖示如下：



顯然的，對於任意正數 a，不等式$|x|>a$的解即爲所有大於a或小於$-a$的數，並可用集合$\{x \mid x>a$ 或 $x<-a\}$來表示。從圖示上，我們觀察到這個集合是由$\{x \mid x>a\}$與$\{x \mid x<-a\}$兩個集合共同所組合成的，這就是集合的聯集概念：對於任意兩個集合 A、B，我們稱由所有屬於 A 或屬於 B 的元素所形成的集合稱爲 A 與 B 的「**聯集**」，並記作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

在這裡，可以取 A、B 分別爲$\{x \mid x>a\}$與$\{x \mid x<-a\}$兩個集合，所以，從上面的說明我們知道

$$A\cup B=\{x \mid x>a \text{ 或 } x<-a\}。$$

同樣的，若 $A=\{1,2\}$， $B=\{2,3\}$， $C=\{3,4\}$，那麼

$$A\cup B=\{1,2,3\}，A\cup C=\{1,2,3,4\}。$$

在$\{x \mid x\geq \frac{1}{2}\}$與$\{x \mid x<\frac{1}{2}\}$的例子裡，我們觀察到這兩個集合(射線)可以共同組成整個實數系(數線)，因此， $\{x \mid x\geq \frac{1}{2}\}\cup\{x \mid x<\frac{1}{2}\}=\boldsymbol{R}$。事實上，對於任意一個集合 A，它與它的補集的聯集一定等於宇集 $\boldsymbol{U}$，也就是說，$A\cup\overline{A}=\boldsymbol{U}$。

事實上，在解方程式 $xy=0$ 時，我們就已經使用了聯集的概念。在平面上，直線方程式 $x=0$、$y=0$ 分別表示 y 軸、x 軸。在這裡，可以把 x 軸當成集合 A，而將 y 軸看成集合 B，所以，方程式 $xy=0$ 的解(即爲 x 軸與 y 軸這兩坐標軸)就是集合 A、B 的聯集。

【範例 7】 解不等式$|2x-1|>3$。

【解】 $|2x-1|>3 \Rightarrow 2x-1<-3$ 或 $2x-1>3$

$\Rightarrow \quad 2x<-2$ 或 $2x>4$

$\Rightarrow \quad x<-1$ 或 $x>2$

因此，不等式的解為所有小於-1 或大於 2 的數，並可用集合$\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$表示。

在範例 7 中，不等式$|2x-1|>3$ 的解也可以由$\{x \mid x<-1\}$和$\{x \mid x>2\}$兩集合聯集而成，並可用$\{x \mid x<-1\} \cup \{x \mid x>2\}$或$\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$來表示。另一方面，我們也可用$|x-\frac{1}{2}|>\frac{3}{2}$來表示 $x>2$ 或 $x<-1$，因此我們也常用$\{x \mid |x-\frac{1}{2}|>\frac{3}{2}\}$來表示不等式的解$|2x-1|>3$。

【類題練習 8】 解下列不等式：

(1) $|3x-2|>7$　　　　(2) $|-4x+5|\geq 3$

【重點整理】

1. 對於任意兩個集合 A、B，由 A 與 B 所有共同的元素所形成的集合稱為 A 與 B 的「交集」，並記作 $A \cap B$，即 $A \cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。
2. 由所有屬於 A 或屬於 B 的元素所形成的集合稱為 A 與 B 的「聯集」，並記作 $A \cup B$，即 $A \cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。
3. 對一不等式的兩邊同加上、減去一個數，或同乘、除以一個正數時，不等號不必改變。
4. 對一不等式的兩邊同乘或除以一個負數時，不等號必需改變方向。
5. 我們可將原不等式化簡而改寫成形如 $x>a$、$x<a$、$x\geq a$ 或 $x\leq a$ 的最簡不等式。
6. 我們可將含絕對值符號的不等式化為不含絕對值符號的不等式。

【家庭作業】

基礎題

1. 在數線上圖示下列不等式：

① $x \geq 5$　② $x < -2$

③ $x > 3$　④ $x \leq -4$

⑤ $-3 < x \leq 2$　⑥ $1 \leq x \leq 2$

2. 解下列不等式：

① $5x+1 \geq 7$　② $-2x-4 \leq 3$

③ $3x-1 < 6x-2$　④ $4x-4 \leq 8-7x$

⑤ $10 \geq 5x-1 \geq 3$　⑥ $2 \leq -5x+3 \leq 6$

⑦ $|3x-1| < 5$　⑧ $|4x-3| > 6$

⑨ $|-4x+1| \geq 5$　⑩ $2x < 3x-3 < 17$

3. 已知 $A = \{2,3\}$，$B = \{3,4,5,6\}$，$C = \{3,4,6\}$，試回答下列各題:

① $A \cap B =$________　② $B \cap C =$________

③ $A \cap C =$________　④ $A \cup C =$________

⑤ $A - B =$________　⑥ $B - C =$________

4. 若 $|x-m| \leq n$的解爲 $3 \leq x \leq 7$，求 m、n 的值。

進階題

5. 設 $A = \{x \mid x^2 - ax - 4 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + ax + b = 0\}$。若 $A \cap B = \{-1\}$，求 a、b 的值。

6. 若 $|ax-b| < 5$的解爲$-1 < x < 4$，求 a、b 的值。

A3-3　不等量基本推論的應用

除了前一節中的三個基本推論外，不等式的遞移律：

如果 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$，

也是非常重要。事實上，對不等號「<」、「≥」和「≤」而言，這幾個基本推論及遞移律也都成立。

我們來看看遞移律與這些推論的幾個應用。

假設已知 $a>b$ 且 $c>d$。我們是否能比較 $a+c$ 和 $b+d$ 的大小呢？

若對 $a>b$ 的兩邊同加 c，可得　　$a+c>b+c$。

若對 $c>d$ 的兩邊同加 b，可得　　$b+c>b+d$。

由遞移律可得　　$a+c>b+c>b+d$。

所以得到：

推論 4：若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+c>b+c>b+d$。

當然，對於不等號「<」、「≥」和「≤」，推論 4 也會成立。

【範例 1】已知 $a<b$ 且 $c<d$。試推論 $a-d<b-c$。

【解】　對 $c<d$ 的兩邊同乘以(-1)，　　$-c>-d$，

即　　$-d<-c$。

對 $a<b$ 的兩邊同減 d，可得　　$a-d<b-d$。

對 $-d<-c$ 的兩邊同加 b，可得　　$b-d<b-c$。

所以，從遞移律可得　　$a-d<b-d<b-c$。

因此，$a-d<b-c$。

【想想看】已知 $a<b$ 且 $c<d$，你能比較 $a-c$ 和 $b-d$ 的大小嗎？

【範例 2】(1) 已知 $a>b>0$ 且 $c>d>0$，試推論 $ac>bd$。

(2) 已知 $a<b<0$ 且 $c<d<0$，試推論 $ac>bd$。

【解】 (1) 因爲 $a>b$ 且 $c>0$，所以 $ac>bc$。

同理，因爲 $c>d$ 且 $b>0$，所以 $bc>bd$。

由遞移律可得 $ac>bc>bd$。

因此，$ac>bd$。

(2) 方法一：

因爲 $a<b$ 且 $c<0$，所以 $ac>bc$。

同理，因爲 $c<d$ 且 $b<0$，所以 $bc>bd$。

由遞移律可得 $ac>bc>bd$。

所以，$ac>bd$。

方法二：

若對 $a<b<0$ 乘以(-1)可得 $-a>-b>0$。

同理，對 $c<d<0$ 乘以(-1)，可得 $-c>-d>0$。

因此，由第(1)題的結果可推知

$$(-a)(-c)>(-b)(-d)。$$

所以，$ac>bd$。

【想想看】已知 $a>b$ 且 $c>d$，請問 $ac>bd$ 是否正確？

【類題練習 1】請在下列各題中填入適當的不等號：

(1) 若$a>b>0$，則a^2 ____ ab _____b^2。

(2) 若$a<b<0$，則a^2 ____ ab _____b^2。

另外，下面兩個不等量的基本推論，對於高中課程中一元二次不等式單元的學習，就顯得格外重要：

推論 5：若 $ab>0$，或$\dfrac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號，

也就是說 $a>0$ 且 $b>0$，或 $a<0$ 且 $b<0$。

推論 6：若 $ab<0$，或$\frac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號，

也就是說 $a>0$ 且 $b<0$，或 $a<0$ 且 $b>0$。

這兩個推論的學習將留待在正式課程中，再做探討。

【重點整理】

1. 不等式的遞移律：如果 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$。
2. 若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+c>b+c>b+d$。對於不等號「$<$」、「$\geq$」和「$\leq$」，前式亦成立。
3. 若 $ab>0$，或$\frac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號。
4. 若 $ab<0$，或$\frac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號。

【家庭作業】

1. 請在下列各題中填入適當的不等號：

① 若 $a>b$，則

ⓐ $a+5$ ____ $b+5$；　　ⓑ $a-4$ ____ $b-4$；

ⓒ $3a$ ____ $3b$；　　ⓓ $-2a$ ____ $-2b$；

ⓔ $a+3$ ____ $b+2$。

② 若 $a>x$ 且 $x>4$，則 a ____ 4。

③ 若 $a<b$，則 $a-6$ ____ $b-4$。

④ 若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+2c$ ____ $b+2d$。

⑤ 若 $a>2$ 且 $c>3$，則 ac ____ 6。

⑥ 若 $a<-2$ 且 $c<-4$，則 ac ____ 8。

⑦ 若$a>5$，則a^2 ____ 25。

⑧ 若$a<-4$，則a^2 ____ 16。

2. 填充題：

① 若 $ab>0$，則(a,b)在第 ______ 象限。

② 若 $ab<0$，則(a,b)在第 ______ 象限。

進階題

3. 試回答下列問題:

① 若 $ab>0$ 且 $a-b>0$，則(a,b)在第 ______ 象限。

② 若 $ab>0$ 且 $a+b<0$，則(a,b)在第 ______ 象限。

4. 已知 $x>2$，試回答下列問題:

① x^2 ______ $2x$　② $2x$ ______ 4　③ x^2 ______ 4

5. 已知 $x<-3$，試回答下列問題:

① x^2 ______ $-3x$　② $-3x$ ______ 9　③ x^2 ______ 9

A3-4　一元二次不等式

在國中的課程中，我們學過用因式分解法、配方法及公式解來解一元二次方程式。那麼，我們是否也可用同樣的概念來解形如$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c\geq 0$的一元二次不等式呢？

對於某些多項式ax^2+bx+c，我們可利用因式分解或公式解的概念把它寫成兩個一次多項式的乘積。此時，下面兩個不等量的基本推論就顯得格外重要：

推論 1：若 $ab>0$，或$\dfrac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號，也就是說

(1)　$a>0$ 且 $b>0$ 或 (2)　$a<0$ 且 $b<0$。

推論 2：若 $ab<0$，或$\dfrac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號，也就是說

(1)　$a>0$ 且 $b<0$ 或 (2)　$a<0$ 且 $b>0$。

現在，我們利用幾個因式分解的技巧來解一元二次不等式。以$x^2-4x+3>0$為例：

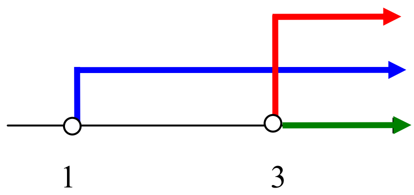
因為$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，所以可將原不等式寫成

$$(x-1)(x-3)>0\ 。$$

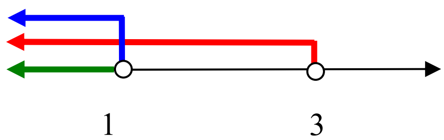
因此，$(x-1)$與$(x-3)$同號。所以有二種可能：

(1) $(x-1)>0$且$(x-3)>0$，或 (2) $(x-1)<0$且$(x-3)<0$。

由(1)可得 $x>1$ 且 $x>3$，因此，$x>3$；



由(2)可得 $x<1$ 且 $x<3$，因此，$x<1$。



綜合上面的兩種情形，知道原不等式的解為$\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$，並可圖示如下：

事實上，代表 1 和 3 的兩個點把數線分成三段：

$$\{x \mid x<1\}，\{x \mid 1<x<3\}及\{x \mid 3<x\}。$$

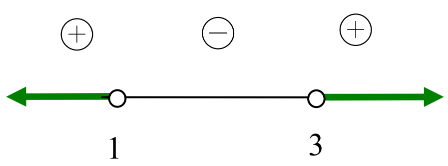
如果將$\{x \mid x<1\}$及$\{x \mid 3<x\}$中的任何一個數代入$(x-1)$與$(x-3)$中，我們發現$(x-1)$與$(x-3)$同號。因此，$\{x \mid x<1\}$及$\{x \mid 3<x\}$中的任何一個數都能滿足$x^2-4x+3>0$。

如果把$\{x \mid 1<x<3\}$中的任何數代入$(x-1)$與$(x-3)$中，可知$(x-1)$與$(x-3)$異號，所以$x^2-4x+3<0$。因此，這些數都不能滿足$x^2-4x+3>0$。

又因爲，當$x=1$ 或$x=3$ 時，$x^2-4x+3=0$。所以，$x=1$ 和$x=3$ 都不是不等式$x^2-4x+3>0$ 的解。綜合上面的說明，我們將各個數代入x^2-4x+3 所得的值的符號列表如下：

	$x-1$	$x-3$	x^2-4x+3
$x=0$	$-$	$-$	$+$
$x=1$	0	$-$	0
$x=2$	$+$	$-$	$-$
$x=3$	$+$	0	0
$x=4$	$+$	$+$	$+$

由上面的說明，可得到下面的圖示：



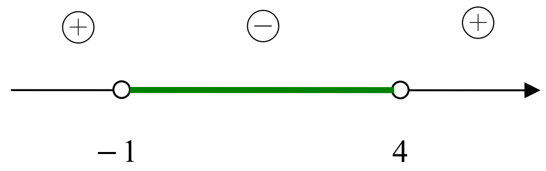
從上圖可以觀察出：只有當$x<1$ 或$x>3$ 時，x^2-4x+3 的值才爲正數。所以，同樣的，我們可以得到不等式的解爲$\{x \mid x<1$ 或$x>3\}$。

如果能將二次多項式ax^2+bx+c寫成兩個一次多項式的乘積，上述的方法是一個方便的解題方法。

【範例 1】 解不等式$x^2-3x-4<0$。

【解】 $\because\ x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$

$\therefore$ 原不等式可寫成$(x+1)(x-4)<0$



只有當$x>-1$且$x<4$時，x^2-3x+4的值才爲負數。所以，得到不等式的解爲$\{\,x\mid -1<x<4\}$。

【類題練習 1】解下列不等式：

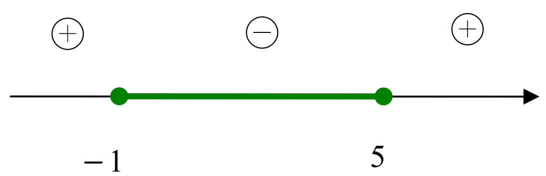
(1) $x^2-4x-5>0$　　(2) $x^2-4x+3<0$

當二次項的係數爲負數時，可以把不等式的兩邊同乘以(-1)，使x^2項的係數爲正數。注意：此時要改變不等式的方向。

【範例 2】解不等式$-x^2+4x+5\geq 0$。

【解】　本題可以把不等式的兩邊同乘以(-1)，使x^2項的係數爲正數，其解法如下：

$$-x^2+4x+5\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-4x-5\leq 0$$
$$\Rightarrow\; (x+1)(x-5)\leq 0$$



因爲當$x=-1$，5 時，$-x^2+4x+5$的值爲 0，因此這兩點也是不等式的解。所以，不等式的解爲$\{\,x\mid -1\leq x\leq 5\}$。

【類題練習 2】解不等式$-x^2+5x-6\geq 0$。

當二次項的係數不等於 1 時，可以用下面的方法來解不等式。

【範例 3】解下列不等式：

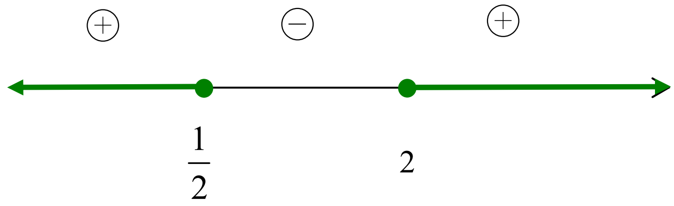
(1) $2x^2-5x+2\geq 0$　　　(2) $2x^2-5x+3<0$

【解】　(1) $\because\ 2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$$\therefore\ 2x^2-5x+2\geq 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2)\geq 0$$

$$\Rightarrow 2(x-\frac{1}{2})(x-2)\geq 0$$

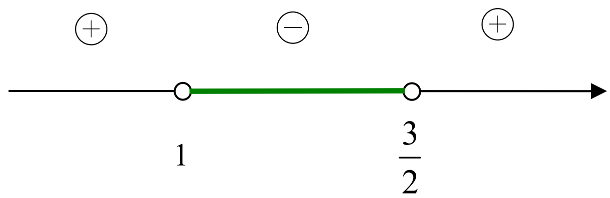
$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})(x-2)\geq 0$$



所以，不等式的解爲 $\{x \mid x\leq \frac{1}{2}$ 或 $x\geq 2\}$。

(2) $2x^2-5x+3<0 \Rightarrow (2x-3)(x-1)<0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-\frac{3}{2})<0$$



所以，不等式的解爲 $\{x \mid 1<x<\frac{3}{2}\}$。

【類題練習 3】解下列不等式：

(1) $3x^2+x-2>0$　　　(2) $3x^2+x-2\leq 0$

由上面的例題中可知：

> 當 $a>0$ 且 $\alpha>\beta$ 時，$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為 $x<\beta$ 或 $x>\alpha$；
> $a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ 的解為 $x\leq\beta$ 或 $x\geq\alpha$；
> $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為 $\beta<x<\alpha$；
> $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ 的解為 $\beta\leq x\leq\alpha$。

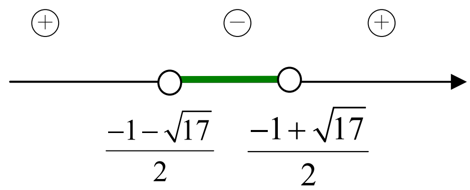
有時候，也可以利用公式解的概念來解一元二次不等式。我們以下面的例子做說明。

【範例 4】 解下列不等式：

(1) $x^2+x-4<0$　　(2) $x^2+5x+3\geq 0$

【解】 (1) 利用公式解來解 $x^2+x-4=0$，得到兩根 α 及 β，其中 $\alpha>\beta$，也就是：

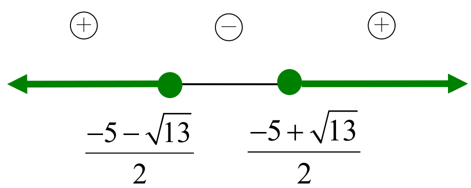
$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\text{、}\beta=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$



所以，解為 $\{x \mid \frac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\}$。

(2) 利用公式解來解 $x^2+5x+3=0$，得到兩根 α、β，其中 $\alpha>\beta$，也就是：

$$\alpha=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\text{、}\beta=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$$



所以，解為$\{x \mid x \le \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$或$x \ge \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\}$。

【類題練習 4】解下列不等式：

(1) $x^2+7x+11 \le 0$　　(2) $x^2+3x+1 \ge 0$

接下來，我們利用配方法的概念及函數的最大值或最小值來解一元二次不等式。

【範例 5】 解下列不等式：

(1) $x^2-6x+9 \ge 0$　　(2) $x^2-2x+5>0$

(3) $x^2+4x+10 \le 0$　　(4) $x^2-4x+4 \le 0$

【解】 (1) 因為$x^2-6x+9=0$的判別式$(-6)^2-4\times 9$等於 0，所以$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$只有一個二重根 3，也就是說，可將$x^2-6x+9 \ge 0$改寫成$(x-3)^2 \ge 0$。

事實上，對任意實數x，我們恆有$x^2-6x+9=(x-3)^2 \ge 0$，因此，不等式$x^2-6x+9 \ge 0$的解為任意實數。

(2) $x^2-2x+5=0$的判別式$(-2)^2-4\times 5$等於-16，所以$x^2-2x+5=0$沒有實根，因此無法使用前面例題的方法來解不等式。事實上利用配方法，可得

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$$

所以對任意實數x，我們恆有$x^2-2x+5=(x-1)^2+4 \ge 4$

因此，不等式$x^2-2x+5>0$的解為任意實數。

(3) 因為$x^2+4x+10=(x+2)^2+6$，所以，當x為任意實數時，我們恆有$(x+2)^2+6 \ge 6+0=6>0$。

因此，$x^2+4x+10 \le 0$無解。

(4) $x^2-4x+4 \le 0 \Rightarrow (x-2)^2 \le 0$ 因為$(x-2)^2$不小於 0，所以$(x-2)^2=0$，也就是說，僅有$x=2$一個解。

【類題練習 5】 解下列不等式：

(1) $x^2-8x+16\geq 0$　　(2) $x^2-12x+36>0$

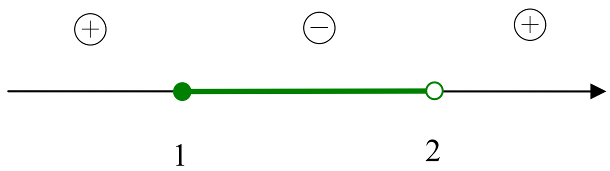
(3) $x^2+8x+20<0$　　(4) $x^2-14x+49\leq 0$

有時候，我們可將分式不等式改寫成一元二次不等式。我們來看下面例子。

【範例 6】 解不等式 $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$ 。

【解】 由不等式 $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$ ，可知 $x-1$ 與 $x-2$ 異號且 $x\neq 2$ 。

所以，$(x-1)(x-2)\leq 0$ 且 $x\neq 2$ 。



因為當 x=1 時，$\dfrac{x-1}{x-2}$=0，所以 $x=1$ 也是不等式的解。因此，不等式的解為 $\{x \mid 1\leq x<2\}$ 。

【類題練習 6】 解下列不等式：

(1) $\dfrac{x+1}{x-4}<0$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+1}\geq 0$

【家庭作業】

解下列不等式：

① $x^2-2x-3>0$　　② $x^2+4x-5\leq 0$

③ $-x^2-4x-3>0$　　④ $3x^2+4x+1>0$

⑤ $2x^2-x-1>0$　　⑥ $x^2-5x-1\geq 0$

⑦ $x^2-5x+1<0$　　⑧ $x^2-4x+4>0$

⑨ $x^2-12x+36\geq 0$　　⑩ $x^2-2x+1<0$

⑪ $x^2+6x+9\leq 0$

⑫ $x^2-2x+6>0$

⑬ $x^2-4x+10\leq 0$

⑭ $x^2-2x+15<0$

⑮ $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$

⑯ $\dfrac{x+1}{2x-1}>0$