A2　一元二次方程式的根與係數的關係

在 4-1 節的想想看中，我們請同學觀察兩根的和、兩根的積與原方程式的係數之間的關係。現在，我們來對這些關係做說明。

設 α 、 β 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個根，因此 $ax^2+bx+c=0$ 可化成 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 。我們知道

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

經由比較係數，得到兩根的和 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及兩根的積 $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$ 。因此，一元二次方程式的根與係數間有以下的關係：

若 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α 、 β ，則 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及 $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$ 。

事實上，由公式解也可以得到：

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

和

$$\alpha\cdot\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

【範例 1】設α、β爲$x^2+3x-8=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(3) $\alpha-\beta$

【解】　$\because \alpha$、β爲$x^2+3x-8=0$的兩根

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{3}{1}=-3$、$\alpha\beta=\dfrac{-8}{1}=-8$

(1) $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-3)^2-2(-8)=25\end{aligned}$$

(2) $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$$

(3) $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(-3)^2-4(-8)=41\end{aligned}$$

所以$\alpha-\beta=\pm\sqrt{41}$。

若知道某一元二次方程式的兩根，我們能不能反推而求得這個一元二次方程式呢？

設α、β爲所求方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根。

等號兩邊同除以a，得　$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

由根與係數的關係得知：　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

因此，方程式可以改寫成$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。

【範例 2】設α、β爲$x^2+10x-50=0$的兩根。求以$\dfrac{1}{\alpha}$、$\dfrac{1}{\beta}$爲兩根的方程式。

【解】　以$\dfrac{1}{\alpha}$及$\dfrac{1}{\beta}$爲兩根的方程式可寫爲：

$$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0 \qquad (1)$$

$\because\ \alpha$ 、β 爲 $x^2+10x-50=0$ 的兩根

$\therefore\ \alpha+\beta=-10$ 、$\alpha\beta=-50$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-10}{-50}=\frac{1}{5} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-50}=-\frac{1}{50} \qquad (3)$$

將(2)、(3)的結果代入(1)中得到

$$x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0\ 。$$

因此，該方程式可表爲 $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0$ 。

【類題練習】 1. 設 α 、β 爲 $x^2+4x-9=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　　(2) $\alpha\beta$　　(3) $\alpha^2+\beta^2$　　(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

2. 設 α 、β 爲 $x^2+4x+2=0$ 的兩根，求以 α^2 、β^2 爲兩根的方程式。

【範例 3】 甲、乙兩生同解一個一元二次方程式。甲因爲看錯一次項係數，而解得兩根爲 2 與 7；乙因爲看錯常數項，而解得兩根爲 1 與 -10；除此以外無其它錯誤。試求正確的兩根爲何？

【解】 我們可設此一元二次方程式爲 $x^2+bx+c=0$ 。

以 2 與 7 爲兩根的一元二次方程式爲

$$x^2-(2+7)x+2\times 7==0\Rightarrow x^2-9x+14=0\ 。$$

因爲甲看錯一次項係數，所以常數項 $c=14$ 是正確的。

以 1 與 -10 爲兩根的一元二次方程式爲

$$x^2-(-10+1)x+(-10)\times 1=0\Rightarrow x^2+9x-10=0\ 。$$

因爲乙看錯常數項，所以一次項係數 $b=9$ 是正確的。

綜合以上的討論得知，原方程式可表爲 $x^2+9x+14=0$，也就是

$(x+2)(x+7)=0$，所以正確的兩根爲-2或-7。

【家庭作業】

1. 設α、β爲$x^2-2x-7=0$的兩根，求下列各式的值：

   ① $|\alpha-\beta|$　　② $\alpha^2+\beta^2$　　③ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

   ④ $(\alpha-1)(\beta-1)$　　⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

2. 甲、乙兩生同解一元二次方程式。甲看錯常數項而得到兩根-1和-3，而乙看錯一次項係數得到兩根4和-3，求正確的兩根。

3. 已知方程式的兩根爲$\dfrac{-1\pm5\sqrt{2}}{4}$，求此方程式。