附錄

A1 立方根與高次方根

在本單元裡，我們除了討論立方根的性質和運算規則以外，也要介紹高次方根。

當實數 a 為某個實數 b 的三次方時，$a=b^3$，我們就稱 b 為 a 的**立方根**，並記作 $\sqrt[3]{a}=b$，其中 $\sqrt[3]{a}$ 讀作「**三次根號 a**」，並稱 a 為「**被開方數**」。例如：$27=3^3$ 及 $-8=(-2)^3$，所以 $\sqrt[3]{27}=3$ 及 $\sqrt[3]{-8}=-2$。不同於平方根的被開方數必須是非負的數，立方根的被開方數可以是任意實數。顯然的，被開方數與它的立方根同號。

在本單元中，我們只討論被開方數為有理數的立方根或高次方根。

【立方根的乘法與除法】

兩個立方根之間的乘法與除法運算類似於平方根的情形，有下列的規則：

(1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$；

(2) $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$，其中 $b\neq 0$。

【範例 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}$　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}$

【解】

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\times 5}=\sqrt[3]{15}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\times 4}=\sqrt[3]{2}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4\div 2}=\sqrt[3]{2}$

(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\div\dfrac{9}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{9}}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{2}{3}$

【類題練習 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$　　(2) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt[3]{15}\div\sqrt[3]{5}$　　(4) $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\div\sqrt[3]{\frac{5}{16}}$

由規則(1)我們知道，$\sqrt[3]{-5}=\sqrt[3]{(-1)^3\times 5}=(-1)\times\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5}$。因此，習慣上，常將$\sqrt[3]{-a}$改寫成$-\sqrt[3]{a}$，其中 a 爲正數。

【最簡根式】

如同平方根的情形，當被開方數爲整數且不是一個完全立方數時，我們可以利用數的標準分解式及立方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡$\sqrt[3]{720}$時，我們先將 720 寫成$2^4\times 3^2\times 5=2^3\times 2\times 3^2\times 5$，再化簡求得

$$\sqrt[3]{720}=\sqrt[3]{2^3\times 2\times 3^2\times 5}=2\sqrt[3]{90}\text{ 。}$$

當被開方數爲有理數時，通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如，我們會將$\sqrt[3]{\frac{8}{5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$改寫成

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}\text{（或}\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}\text{）。}$$

類似平方根的化簡，我們將立方根寫成「**最簡根式**」$\frac{p}{q}\sqrt[3]{n}$（或$\frac{p\sqrt[3]{n}}{q}$）的形式，其中$\frac{p}{q}$爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的立方整除，我們稱這樣的過程爲「**立方根化簡**」。例如：$2\sqrt[3]{90}$及$\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$都是最簡根式。

【範例 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{270}$　　(2) $\sqrt[3]{-432}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

【解】　(1) $\sqrt[3]{270}=\sqrt[3]{3^3\times 10}=3\sqrt[3]{10}$

(2) 因為$-432=-2^4\times 3^3=-(2\times 3)^3\times 2$，

所以$\sqrt[3]{-432}=-\sqrt[3]{(2\times 3)^3}\times\sqrt[3]{2}=-6\sqrt[3]{2}$ 。

(3) 我們可先將$\dfrac{2}{3}$的分子、分母同乘於3^2後再做化簡，即

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 3^2}{3\times 3^2}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$ 。

【類題練習 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{135}$　　(2) $\sqrt[3]{-3000}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

當兩個立方根化為最簡根式後，如果在它們的最簡根式的立方根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個立方根為**同類方根**。例如，$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$）和$-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$都是同類方根，但是$\sqrt[3]{2}$與$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$）就不是同類方根。

在化簡根式時，我們可以利用同類方根的合併來簡化數學式。

【範例 3】化簡下列各式：

(1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}$　　(2) $4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\dfrac{7}{27}}-\sqrt[3]{\dfrac{81}{2}}$

【解】 (1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}=(-2+6)\sqrt[3]{2}+(3-5)\sqrt[3]{3}$

$$=4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$$

(2) $4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\frac{7}{27}}-\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3\times2\times2}}{\sqrt[3]{2\times2\times2}}$$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$=4\sqrt{7}+\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}$$

註：$\sqrt{7}$和$\sqrt[3]{7}$不是同類方根。

【類題練習 3】化簡下列各式：

(1) $-4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{3}$　　(2) $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{\frac{125}{2}}$

對於某些較爲特殊的根式，可嘗試利用乘法公式來求乘積。我們先複習兩個常用的立方公式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

【範例 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$。

【解】 我們可以利用$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$來化簡。

令 $a=\sqrt[3]{3}$、$b=\sqrt[3]{2}$，即可得到：

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3$$

$$=3+2=5$$

【類題練習 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$。

【根式分母的有理化】

如同平方根的有理化技巧，我們也可利用立方乘法公式來做分母含有立方根的根式的有理化。

【範例 5】有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

【解】　(1) 由立方公式，我們知道

$$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})^3+1^3=2+1=3。$$

所以，若想將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$即可。因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

(2) 我們對分子與分母同乘以$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$，即得

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1\times(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}。$$

【類題練習 5】有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

【認識高次方根】

除了 a 的立方根記爲 $\sqrt[3]{a}$ 以外，其實平方根 $\sqrt{a}$ 即爲 $\sqrt[2]{a}$ 讀作「**二次根號 a**」，但是 **2 可以省略不寫**。在高中數學的指數單元中，還會出現 $\sqrt[4]{a}$ (讀作「**四次根號 a**」)、$\sqrt[5]{a}$ (讀作「**五次根號 a**」)、…等高次方根。因此，若 n 爲正整數，且 $a=b^n$ 時，我們就稱 b 爲 a 的 **n 次方根**，並記作 $\sqrt[n]{a}=b$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 讀作「**n 次根號 a**」，並稱 a 爲「**被開方數**」。在這裡，我們假設 $\sqrt[n]{a}$ 有意義，例如當 n 爲偶數時，被開方數 a 必須爲非負數；當 n 爲奇數時，a 可以爲任意實數。

事實上，兩個 n 次方根之間的乘法與除法，也類似於平方根及立方根的運算規則：當 $\sqrt[n]{a}$ 、$\sqrt[n]{b}$ 有意義時，

(1) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$，其中 $n\geq 2$，$b\neq 0$。

如同平方根及立方根的情形，我們可以利用數的標準分解式來化簡高次根式。

【範例 6】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{16}$　(2) $\sqrt[5]{-243}$　(3) $\sqrt[6]{192}$　(4) $\sqrt[9]{-1024}$　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

【解】　(1) 因爲 $16=2^4$，所以 $\sqrt[4]{16}=2$。

(2) 因爲 $-243=(-1)^5\times 3^5=(-3)^5$，所以 $\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$。

(3) $\sqrt[6]{192}=\sqrt[6]{2^6\times 3}=\sqrt[6]{2^6}\times\sqrt[6]{3}=2\sqrt[6]{3}$

(4) $\sqrt[9]{-1024}=\sqrt[9]{-2^{10}}=\sqrt[9]{(-2)^9\times 2}=\sqrt[9]{(-2)^9}\times\sqrt[9]{2}=-2\sqrt[9]{2}$

(5) 因爲$\frac{16}{81}=\frac{2^4}{3^4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$，所以$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$ 。

因爲實數的偶次方必爲正數或 0，所以偶次方根的被開方數如同平方根必須爲非負數,如範例 6中的(1)、(3)和(5)；而奇次方根的被開方數如同立方根可爲任意實數，如範例 6中的(2)和(4)。事實上，遇到奇次方根且被開方數爲負數時，可先將負號寫在根號外，例如：在範例 6(2)中，

$\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-\sqrt[5]{3^5}=-3$ 。

【類題練習 6】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{81}$ (2) $\sqrt[6]{64}$ (3) $\sqrt[7]{-128}$ (4) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$

在國中階段，我們學過指數爲整數的指數律。事實上，n 次方根也可以用指數的形式來表示。例如：a 的二次方根可以記爲$a^{1/2}$(讀作 a 的二分之一次方)，即$\sqrt{a}=a^{1/2}$；a 的三次方根可以記爲$a^{1/3}$ (讀作 a 的三分之一次方) ，即$\sqrt[3]{a}=a^{1/3}$。所以，a 的 n 次方根可以記爲$a^{1/n}$(讀作 a 的 n 分之一次方)，即$\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$ 。

由方根的乘法與除法，我們知道：

$3^{1/2}\times 3^{1/2}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times 3}=3^1$； $2^{1/2}\times 3^{1/2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=(2\times 3)^{1/2}$；

$(2^3)^{1/2}=\sqrt{8}=\sqrt{2\times 2\times 2}=(\sqrt{2})^3=2^{1/2}\times 2^{1/2}\times 2^{1/2}=2^{1/2+1/2+1/2}=2^{3\times(1/2)}$ ；

$$(2^{1/2})^3=(\sqrt{2})^3=\sqrt{2^3}=2^{(1/2)\times 3}\text{；}2^{1/2}\div 3^{1/2}=\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=(\frac{2}{3})^{1/2}\text{等。}$$

也就是說，在高中的課程中，指數律的學習將由指數爲整數延伸到有理數：

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\text{；}\qquad a^m\times b^m=(ab)^m\text{；}$$

$$(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}\text{；}\qquad a^m\div b^m=(\frac{a}{b})^m\text{，其中 } b\neq 0\text{。}$$

【家庭作業】

1. 求下列各數的立方根：

   ① 64　　② -729

2. 將下列各數化簡成最簡根式：

   ① $\sqrt[3]{128}$　　② $\sqrt[3]{-4000}$

3. 化簡下列各式：

   ① $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{6}$　　② $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{45}$

4. 化簡 $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$。

5. 化簡下列各式：

   ① $-6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$　　② $10\sqrt{2}+\sqrt[3]{8}+\sqrt{18}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

6. 化簡 $(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$。

7. 有理化下列各根式的分母：

   ① $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$　　② $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}$

8. 化簡下列各式：

   ① $\sqrt[5]{32}$　　② $\sqrt[4]{48}$　　③ $\sqrt[5]{-6250}$　　④ $\sqrt[5]{-\frac{1024}{3125}}$