六、函數

6-1 函數的概念

在國中的課程裡，我們學過二元一次方程式，例如：$2x-y=6$，在沒有限制範圍下，(x,y)有無限多組解，如下表。換句話說，若先設定 x 的值，便可由 $y=2x-6$ 得到對應的 y 值。

x	1	2	3	$\cdots$
y	-4	-2	0	$\cdots$

再以二次多項式 x^2-3x+2 為例，如果我們以 y 代表這個多項式，即 $y=x^2-3x+2$，由下表，我們也可以由先設定 x 的值，而得到對應的 y 值。

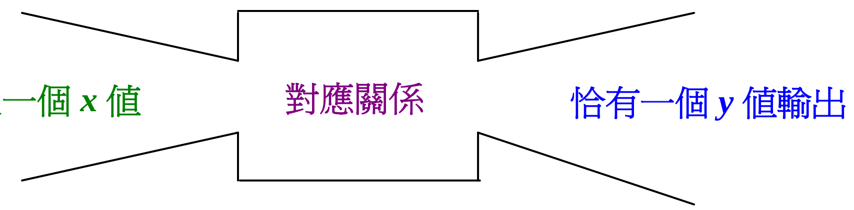
x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\cdots$

綜合上面的說明，我們看到：如果令 y 為某一個 x 的代數式，那麼給定一個 x 值就可能會有一個 y 值與它對應。也就是 x 和 y 都代表變量，而這兩個變量之間存在某種對應關係。

事實上，在規定的範圍內，若給定一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應。像這種 x 與 y 的對應關係，在數學上稱為「**y 是 x 的函數**」或簡稱為「**函數**」（**function**）。

因此，對於一個 y 是 x 的函數而言，我們知道：

任意給定的一個 x 值，都恰有一個（有一個且只有一個）y 值與它對應。



我們常將 x 的函數記作 **$f(x)$**(讀作「**f of x**」)，且以 **$y=f(x)$**表示此一函數或對應關係。爲了方便，我們也可以用其它文字符號來表示 x 的函數，如 $g(x)$、$h(x)$、⋯等。

就一般情形而言，當 x 值變化時，y 值可能隨著變化。所以，我們稱 x 爲此函數的**自變數**，而 y 稱爲**應變數**。

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} y=f(x)$$

自變數　　　　應變數

當變數 x 等於 a 時，我們稱其所對應的 y 值爲這個函數在 $x=a$ 時的**函數值**，且記作 **$f(a)$**。最常見的函數是由代數式所定義出的數量關係，如 $y=x^2$、$g(x)=2x^2-1$、⋯。注意 $f(x)=x^2$、$y=x^2$ 和 $y=f(x)=x^2$ 這些數學式都是同一個函數的不同記法。對於函數 $g(x)=2x^2-1$ 而言，如果我們要找 $x=4$ 所對應的值（即 $g(4)$）時，我們只需把 4 代入 g 的定義公式（也就是多項式 $2x^2-1$）裡，並算出 $2(4)^2-1=2\times16-1=31$ 即可，因此 $g(4)=31$。同理，我們可以把任意的多項式當作一個函數，並稱它爲**多項式函數**。

【類題練習 1】 (1) 設 $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$，求 $f(0)$和 $f(-\frac{2}{5})$。

(2) 設 $f(x)=2x^2-1$，求 $f(5)$。

當以數學式來描述函數時，那麼式子中的數學運算必須有意義。以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 爲例，我們知道當 $x=1$ 時，數學式 $\dfrac{1}{x-1}$ 的分母爲 0，因此沒有它所對應的值。所以自變數 x 不可以爲 1；也就是說，當 $x=1$ 時，函數 $f(x)$ 沒有意義（或稱爲沒有定義）；事實上，函數 $f(x)$在 x 等於 1 以外的數，都有其對應的值。通常，若非特別規定，自變數的變動範圍，是泛指使函數對應的值存在的任何數。又如 $g(x)=\sqrt{x-1}$，對於任何大於 1 或等於 1 的數，都有其所對應的值，而且 x 也只有等於這些數時，$g(x)$才有定義。

當自變數 x 不論爲何值時，函數值 y 永遠不變，像這樣的函數稱爲**常數函數**(「常」是永恆的意思)，並以 $f(x)=c$ 或 $y=c$ 的形式表示，其中 c 是一個確定的數（或稱爲**常數**），這是最簡單的函數。

接著來看看另外一種較爲簡單的函數。首先，令 a、b 爲兩個常數，並且 $a\neq 0$。我們稱形如 $f(x)=ax+b$ 的函數爲**一次函數**，並稱 ax 爲 $f(x)$ 的**一次項**，a 爲 x 的**係數**，而 b 爲 $f(x)$的**常數項**。

【類題練習 2】 (1) 設 $f(x)=-4x+5$，x 項的係數爲_______，常數項爲_______。

(2) 設 $f(x)=5x^2-2x+1$，x^2 的係數爲_______，x 項的係數爲_______，常數項爲_______。

是不是所有的函數都可以用代數式來表示呢？我們以民國 94 年每個月份與它的天數（見下表），來說明另一種呈現函數的形式。

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

如果想要找一個簡單的代數式，使得它在每個月份的值等於上表中相對應的值，是一件不容易的工作。像這樣的函數，與其找出這個代數式，還不如用表列的方式陳述函數關係方便。

【想想看】在上表中，月份是天數的函數嗎？

【重點整理】

1. 對於一個函數 $y=f(x)$ 而言，任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應。當變數 x 等於 a 時，我們稱其所對應的 y 值為這個函數在 $x=a$ 時的函數值，且記作 $f(a)$。
2. 當自變數 x 不論為何值時，函數值 y 永遠不變，像這樣的函數稱為常數函數。

【家庭作業】

基礎題

1. (　　) 已知 x、y 兩變數之間的對應關係表列如下，哪一組無法表示 y 是 x 的函數？

(A)

x	1	2	3	4
y	5	5	5	5

(B)

x	1	2	3	2
y	-1	4	3	2

(C)

x	-2	-1	0	1
y	-1	0	1	2

(D)

x	1	2	3	4
y	3	4	5	6

2. (　　) 下列各式中，哪一個不是 x 的函數？

(A) $y=3x-1$　(B) $y=\dfrac{2}{x}$　(C) $y^2=3x-11$　(D) $y=x^2$

3. 設 $f(x)=4x^2+2x-3$，求 $f(2)$。
4. 設 $f(x)=\sqrt{x^2-16}$，求 $f(5)$。
5. 設 $f(x)=34x-5$，x 項的係數為_______，常數項為_______。
6. 設 $f(x)=-12x^2+2x-31$，x^2 的係數為_______，x 項的係數為_______，常數項為_______。

進階題

7. 設函數 $f(x)=\dfrac{100}{x-2}$，則當 $x=$_____時，沒有對應的函數值。

8. 已知$\dfrac{1}{7}=0.142857142857\cdots$，設 $f(n)$表「$\dfrac{1}{7}$化成小數，小數點後第 n 位的數字」。試回答下列問題：

① 求 $f(1)+f(5)-f(9)$。

② 求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$。

6-2 線型函數

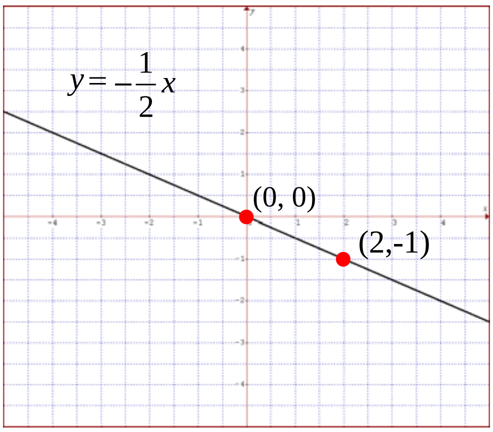
在坐標平面上，描繪滿足 $y=f(x)$函數關係的所有點$(x, f(x))$所得到的圖形，就稱爲函數 $f(x)$的圖形。我們如何描繪一次函數 $f(x)$的圖形呢？首先將 $y=ax+b$ 改寫成 $ax-y+b=0$ 的形式，其中 a、b 分別爲給定的數(常數)而且 $a\neq 0$。因此在圖形上的點，其 x 坐標與 y 坐標滿足二元一次方程式 $ax-y+b=0$。所以我們可使用描繪二元一次方程式解的圖形所用的方法來畫 $y=ax+b$ 的圖形。當然我們也可用列表再描點的方式來畫圖。

【範例 1】在坐標平面上畫出函數 $f(x)=-\frac{1}{2}x$的圖形。

【解】 這個函數可以記爲 $y=f(x)=-\frac{1}{2}x$，因此 $y+\frac{1}{2}x=0$。

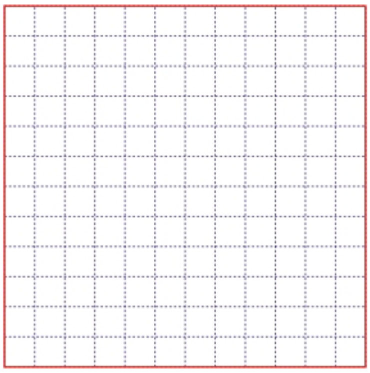
x	-2	0	2
y	1	0	-1

因爲二元一次方程式解的圖形爲直線，所以只要找此二元一次方程式的兩個相異解，並在坐標平面上找到解所對應的兩個點，再繪出通過此兩點的直線。因此函數的圖形爲通過$(0, 0)$及$(2,-1)$的直線（如下圖）：



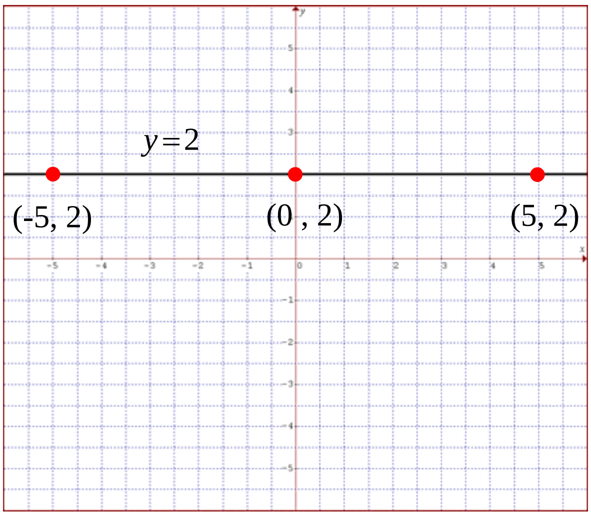
事實上，對於任何一個二元一次方程式 $ax+by+c=0$，其中 $b\neq 0$，我們都可以把它改寫成 $by=-ax-c$ 或 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$。因此這個二元一次方程式解的 y 坐標可看成 x 坐標的函數。

【類題練習 1】 在坐標平面上畫出函數 $f(x)=x+3$ 的圖形。

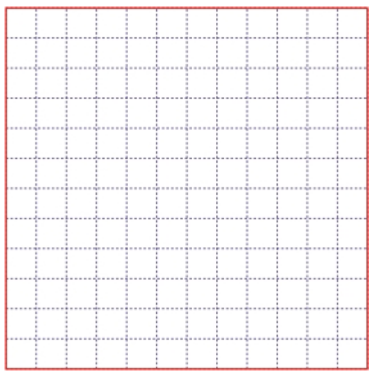


【範例 2】 在坐標平面上畫出函數 $g(x)=2$ 的圖形。

【解】 由於 $g(x)=2$，我們知道 $y=2$，也就是 $y-2=0$。所以其圖形爲通過(0, 2)且與 x 軸平行的直線。



【類題練習 2】 在坐標平面上畫出函數 $h(x)=-2$ 的圖形。



由範例 1 及範例 2 的討論，我們知道：

在函數 $f(x)=ax+b$ 中，當 $a=0$ 時，$f(x)$為常數函數；

當 $a\neq 0$時，$f(x)$為一次函數。

因為常數函數與一次函數的圖形都是一條**直線**，因此，我們通稱它們為**線型函數**。

【重點整理】

1. 於任何一個二元一次方程式 $ax+by+c=0$，其中 $b\neq 0$，都可以把它改寫成 $by=-ax-c$ 或 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$。因此這個二元一次方程式解的 y 坐標可看成 x 坐標的函數。
2. 在函數 $f(x)=ax+b$ 中，當 $a=0$ 時，$f(x)$為常數函數；
   當 $a\neq 0$ 時，$f(x)$為一次函數。
3. 因為常數函數與一次函數的圖形都是一條直線，因此統稱為線型函數。

【家庭作業】

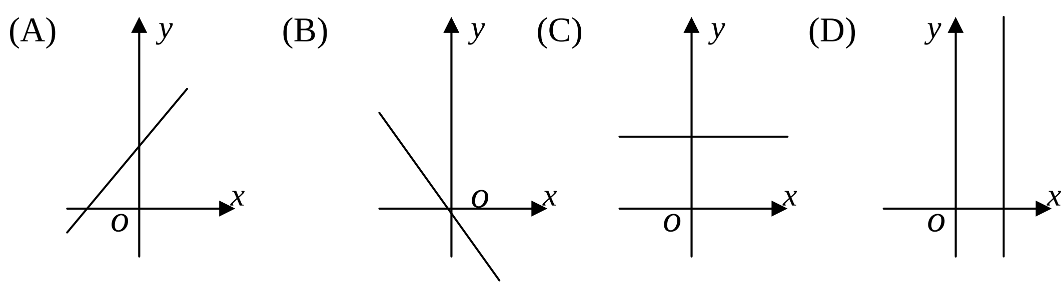
基礎題

1.（　）下列何者不是線型函數？

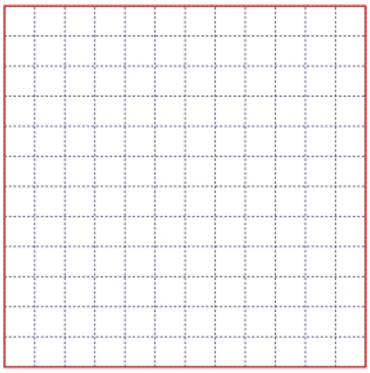
(A) $f(x)=2x+3$　　(B) $f(x)=x^2$

(C) $f(x)=-3x+2$　　(D) $f(x)=5$

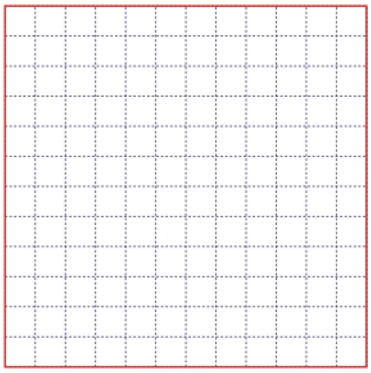
2.（　）下列何者不是線型函數的圖形？



3. 在坐標平面上畫出函數 $f(x)=2x+5$ 的圖形。



4. 在坐標平面上畫出函數 $h(x)=4$ 的圖形。



進階題

5. 在坐標平面上畫出函數 $f(x)=-3$ 的圖形，其中 $x\geq 0$。

6. 在坐標平面上畫出函數 $g(x)=\dfrac{6-2x}{3}$ 的圖形。

7. 在坐標平面上畫出函數 $h(x)=-|x-1|$ 的圖形。

8. 已知由地面每升高 100 公尺，氣溫就下降 0.6℃。假設地面上的溫度是 20℃，而離地面 x 公尺處的溫度是 y℃，試回答下列問題：

   ① x、y 之間的函數關係式爲何？

   ② 離地面 3000 公尺處的溫度是多少？

9. 已知長 20 公分的蠟燭，每 3 分鐘燃燒 0.2 公分。若燃燒 x 分鐘後，蠟燭的長度剩下 $f(x)$公分，試回答下列問題：

   ① 求 x 與 $f(x)$的函數關係。

   ② 求 $f(6)$和 $f(8)$。

   ③ 求 $f(301)$。

6-3 二次函數及其圖形

從 6-2 節中，我們知道可以將任意一個多項式當作一個函數，並稱它為多項式函數。例如，對於 a、b、c 三個常數，其中 $a\neq 0$，我們知道 ax^2+bx+c 為一個二次多項式，因此，我們稱形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數為**二次函數**，並稱 ax^2 為 $f(x)$的**二次項**，a 為二次項的係數，bx 為**一次項**，b 為一次項的係數，而 c 為這個函數的**常數項**。

我們學過利用配方法來解一元二次方程式，同樣的，也可以利用配方法將 ax^2+bx+c 改寫成

$$a(x-h)^2+k$$

的形式，其中

$$h=-\frac{b}{2a}\text{、}k=\frac{4ac-b^2}{4a}\text{。}$$

因此，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 都可以改寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

對於二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 而言，我們觀察到：

(1) 當 $a>0$ 時，因為 $a(x-h)^2\geq 0$，所以函數的值永遠不小於 k，並且當 $x=h$ 時，函數的值為 k，因此，函數的**最小值**為 k。這表示函數圖形中最低點的 y 坐標為 k，所以其圖形必定不會在水平線 $y=k$ 的下方。

(2) 當 $a<0$ 時，因為 $a(x-h)^2\leq 0$，函數的值永遠不大於 k，並且當 $x=h$ 時，函數的值為 k，因此，函數的**最大值**為 k。這表示函數圖形中最高點的 y 坐標為 k，所以其圖形必定不會在水平線 $y=k$ 的上方。

不論在那一種情形下，函數圖形都會與水平線 $y=k$ 交於(h, k)，我們就稱(h, k)為圖形的**頂點**。

【範例 1】 寫出下列函數圖形的頂點：

(1) $y=3(x-1)^2+2$　　(2) $y=-3(x+1)^2+1$

(3) $y=2(x-3)^2-1$　　(4) $y=-2(x+3)^2-2$

【解】 上列各函數圖形的頂點分別為：

(1) $(1, 2)$　(2) $(-1, 1)$　(3) $(3, -1)$　(4) $(-3, -2)$

【類題練習 1】 寫出下列函數圖形的頂點：

(1) $y=4(x+1)^2+3$　　　(2) $y=-5(x-1)^2-2$

我們也觀察到另一個有助於描繪二次函數圖形的事實：對於任何一個數 c，函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在 $x=h+c$ 及 $x=h-c$ 所得到的函數值都爲 ac^2+k。因此，$(h+c,ac^2+k)$與$(h-c,ac^2+k)$兩點都在函數圖形上，並且在直線 $x=h$ 的**左右兩側對稱**，因此稱直線 $x=h$ 爲圖形的**對稱軸**。

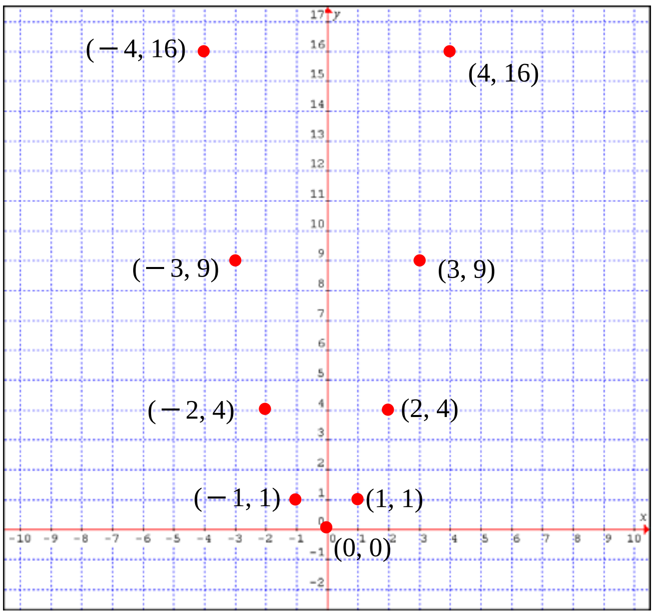
在描繪圖形時，可用配方法將任何一個二次函數改寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。所以，我們首先畫形如 $y=ax^2$ 的函數圖形，其次再來畫形如 $y=ax^2+k$ 及 $y=a(x-h)^2$ 的圖形，並比較這些函數圖形之間的異同。最後，總結如何從 $y=ax^2$ 的圖形來畫出 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

【範例 2】 在坐標平面上畫出 $y=x^2$ 的函數圖形。

【解】 我們先將對應的函數值列表如下：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

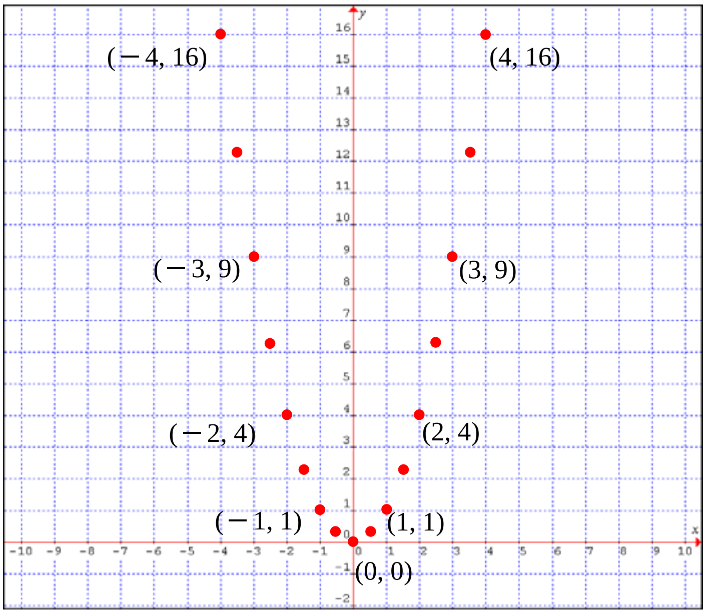
在坐標平面上，將表中所列的點一一描繪出，得到下圖：



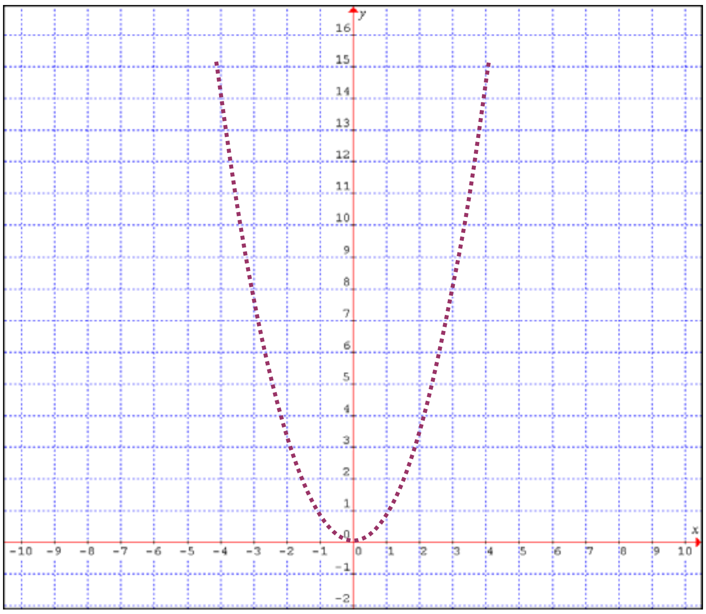
如果在 -4 和 4 之間多取一些 x 值，可得下表：

x	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
y	16	$\frac{49}{4}$	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	$\frac{49}{4}$	16

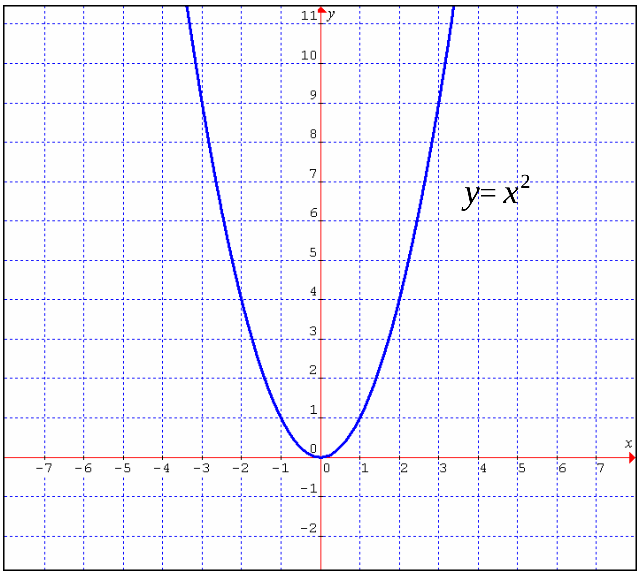
然後再將這些數所對應的點描到同一坐標平面上，得到下圖：



同樣的，在 -4 和 4 之間取更多的 x 值，然後再將這些數所對應的點描到同一坐標平面上，得到下圖。

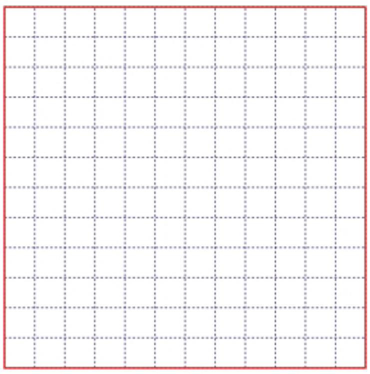


事實上，如果我們在單位長度內所取的數對越多，則描到坐標平面上的對應點就越密，不難看出這些點可以連接成一條平滑的曲線。將這些數對所代表的點描出來，然後以平滑曲線，將這些點連接起來，如下圖所示就是函數 $f(x)$的圖形。



因爲上面的圖形可以向上無限延伸，因此稱這種圖形爲**開口向上**。我們也觀察到圖形的對稱性：$y = x^2$ 的圖形以直線 $x = 0$ 爲對稱軸。同時，也觀察到只要描繪幾個適當的點，並以平滑的曲線連接這些點，即可得到函數圖形。

【類題練習 2】試描繪 $y = 2x^2$的圖形。



如果將範例 2 中的 x^2改成$-x^2$，圖形會有什麼改變呢？讓我們來看以下的例子。

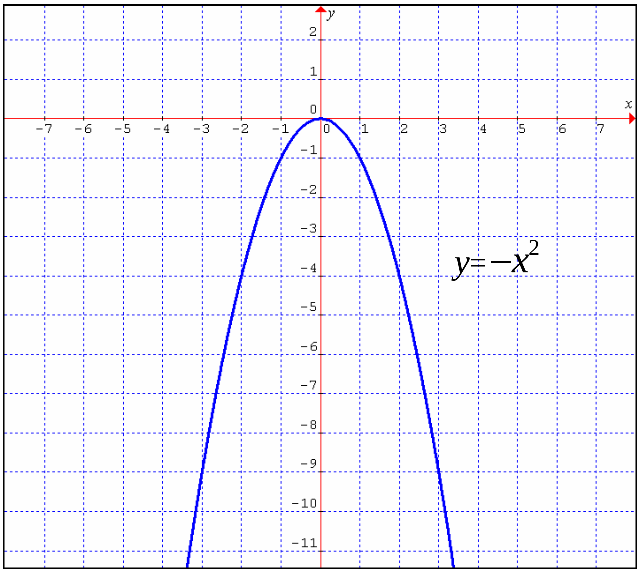
【範例 3】 仿照畫出 $f(x) = x^2$ 的圖形，來畫 $f(x) = -x^2$ 的圖形。

【解】 圖形的頂點位置在（0, 0），且以直線 $x = 0$ 爲對稱軸。將對應

的函數值列表如下：

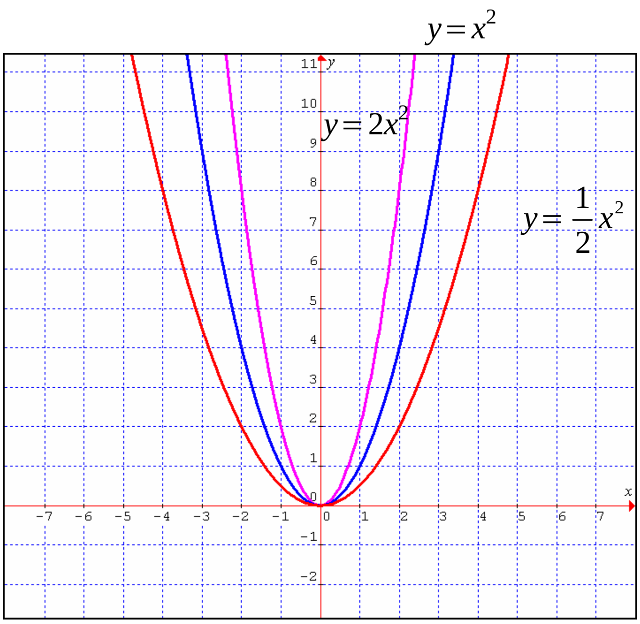
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

然後再描點並以平滑的曲線連接這些點（如下圖）。



我們觀察到形如範例 3 的圖形**開口向下**，並且與向上斜拋一物體落下的路徑相似，因此稱它為開口向下的**拋物線**；從圖中我們也觀察到 $y=-x^2$ 與 $y=x^2$ 的函數圖形在 x 軸的上下對稱。

接下來，我們在同一坐標平面上，來比較 $y=x^2$ 、$y=2x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的圖形之間的關係。



由上圖，我們也觀察到 $y=x^2$ 、$y=2x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2$ 這些函數的 x^2 項係數都是正數，並且它們的圖形都是開口向上而且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。因此，x^2 項係數的正負號決定了開口的方向：

若 x^2 項係數爲正數時的開口向上，爲負數則是開口向下。

另一方面，x^2 項係數的絕對值大小會影響開口的大小：

若x^2項係數的絕對值越大，則開口越小。

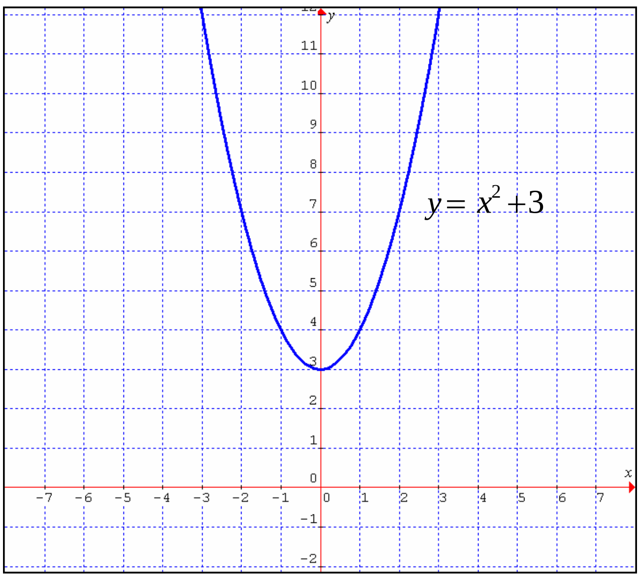
【類題練習 3】 在同一坐標平面上，比較 $y=-x^2$ 、$y=-2x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 開口的大小。

接下來我們來畫形如 $y=ax^2+k$ 的圖形。顯然的，我們知道它的頂點在$(0,k)$ 且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。

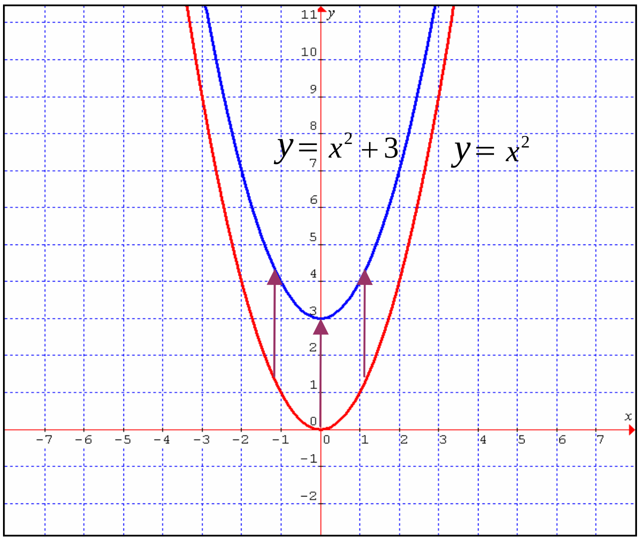
【範例 4】 試描繪 $y=x^2+3$ 的圖形。

【解】 $y=x^2+3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0,3)$，且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。

x	-2	-1	0	1	2
y	7	4	3	4	7



如果我們將 $y=x^2$ 及 $y=x^2+3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=x^2$ 的圖形**(**沿 y 軸**)向上移動 3 個單位長**，即可以得到 $y=x^2+3$ 的圖形。

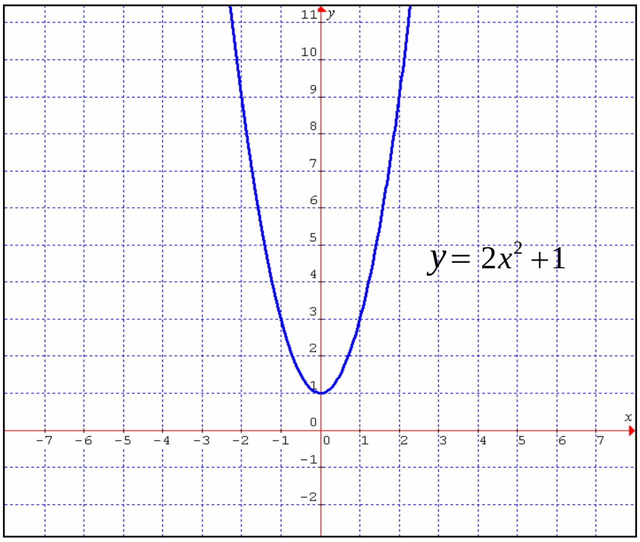
【類題練習 4】 將 $y=x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向____移動____ 個單位長，即可以得到 $y=x^2-2$ 的圖形。

【範例 5】 試描繪 $y=2x^2+1$ 的圖形。

【解】 $y=2x^2+1$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在(0, 1)，且以直線 $x=0$ 為對稱軸。將對應的函數值列表如下，

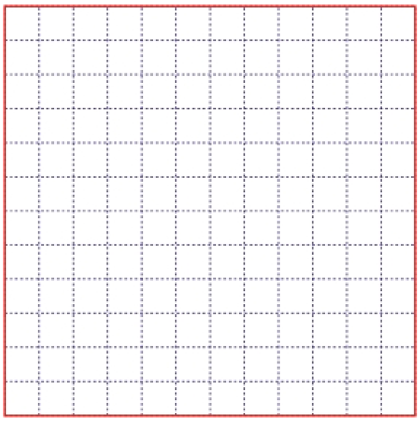
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	19	9	3	1	3	9	19

然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



如範例 4，我們也發現只要將類題練習 2 中 $y = 2x^2$ 的圖形**(**沿 y 軸**)向上移動一個單位長**，即可以得到 $y = 2x^2 + 1$ 的圖形。

【類題練習 5】 試描繪 $y = -2x^2 + 3$ 的圖形，並寫出頂點坐標。



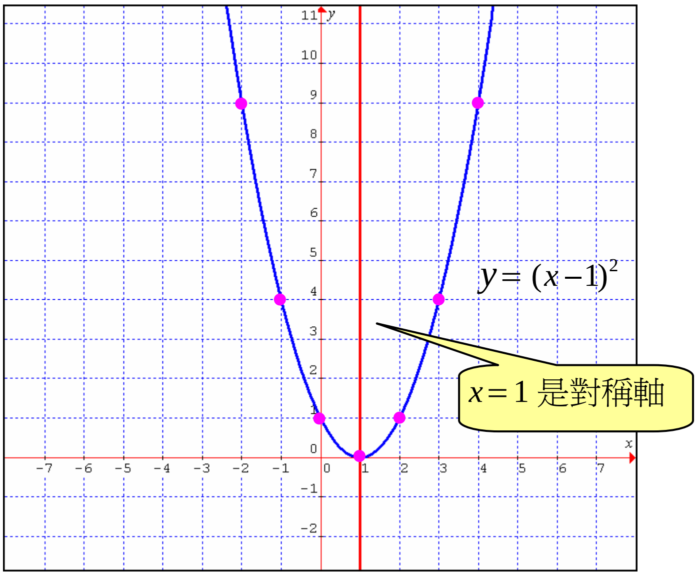
現在我們來畫形如 $y = a(x-h)^2$ 的圖形。我們知道它的頂點在$(h, 0)$及其對稱軸爲直線 $x = h$。

【範例 6】試描繪 $y = (x-1)^2$ 的圖形。

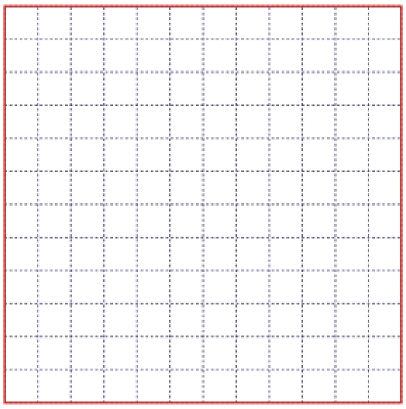
【解】 $y = (x-1)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在(1, 0)，且以直線 $x = 1$ 爲對稱軸。將函數的對應值列表如下，

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

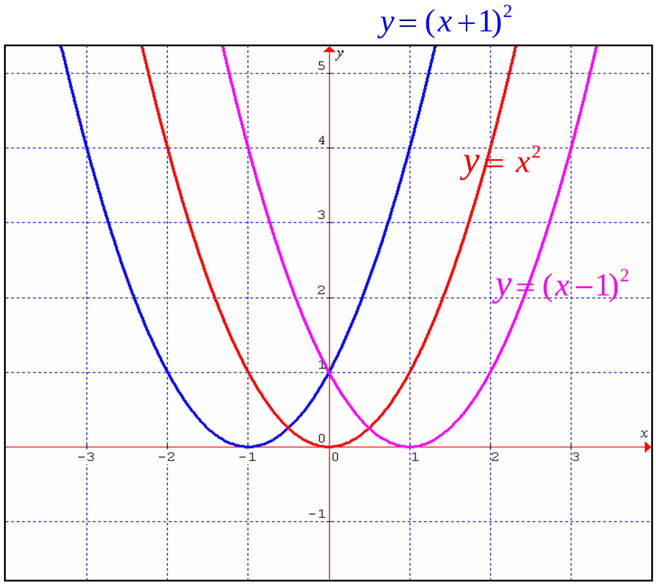
然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



【類題練習 6】 試描繪 $y=(x+1)^2$ 的圖形。



我們再來比較 $y=x^2$、$y=(x-1)^2$ 及 $y=(x+1)^2$ 圖形之間的異同。



由上圖可知，$y=x^2$ 、 $y=(x-1)^2$ 及 $y=(x+1)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。我們也發現：若將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向右移動**一個單位長，即可得到 $y=(x-1)^2$ 的圖形；反之，若將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向左移動**一個單位長，便可得到 $y=(x+1)^2$ 的圖形。

我們也知道 $y=-x^2$ 、 $y=-(x-1)^2$ 及 $y=-(x+1)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。但是，它們頂點的位置分別在(0, 0)、(1, 0)及(−1, 0)。如同前面的說明，如果將 $y=-x^2$ 的圖形**向右移動**一個單位長，就可以得到 $y=-(x-1)^2$ 的圖形；反之，若將 $y=-x^2$ 的圖形**向左移動**一個單位長，便可得到 $y=-(x+1)^2$ 的圖形。我們稱將圖形左右或上下移動的過程為**平移**。

【類題練習 7】（1） $y=(x-2)^2$ 的圖形是將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向____移動____ 個單位長，即可以得到。

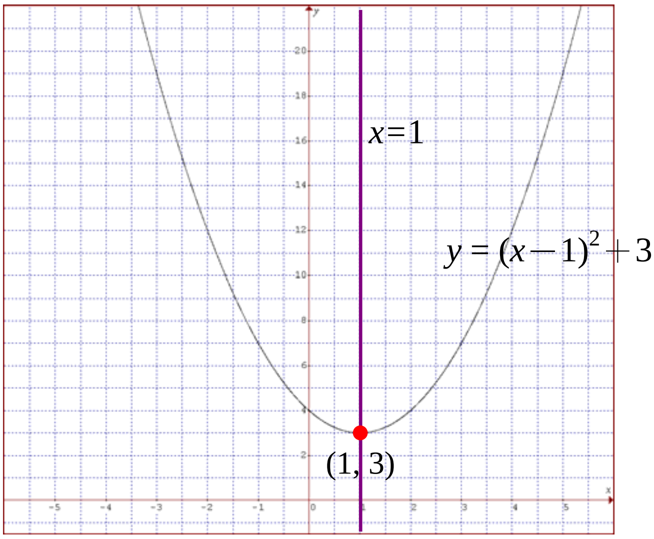
（2） $y=-(x+3)^2$ 的圖形是將 $y=-x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向____移動____ 個單位長，即可以得到。

現在我們來畫 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。我們知道它的頂點在(h, k)且對稱軸為 $x=h$。

【範例 7】 試描繪 $y=(x-1)^2+3$ 的圖形。

【解】 $y=(x-1)^2+3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在(1, 3)，且以直線 $x=1$ 為對稱軸。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	7	4	3	4	7	12



【範例 8】試描繪 $y=2x^2+4x+3$ 的圖形。

【解】 $y=2x^2+4x+3=2\left(x^2+2x+1\right)+3-2$

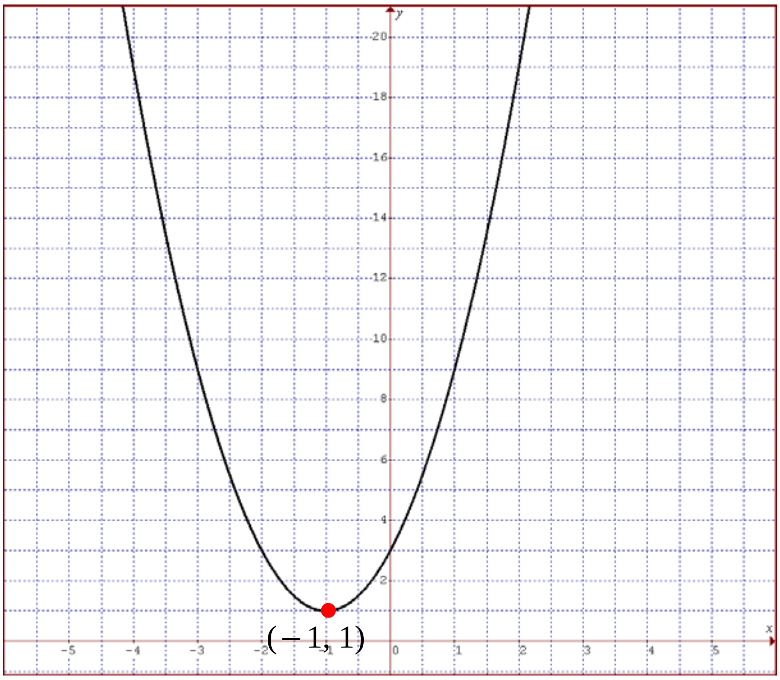
$$=2(x+1)^2+1$$

圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在 $(-1, 1)$，且以直線 $x=-1$ 為對稱軸。

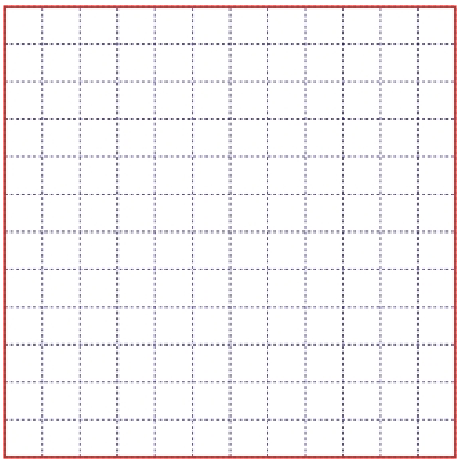
由下表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	19	9	3	1	3	9	19

我們可以繪製出 $y=2x^2+4x+3$ 的圖形如下：



【類題練習 8】試描繪 $y=2x^2-12x+23$的圖形。



【範例 9】試描繪 $y=-2x^2+8x-5$的圖形。

【解】

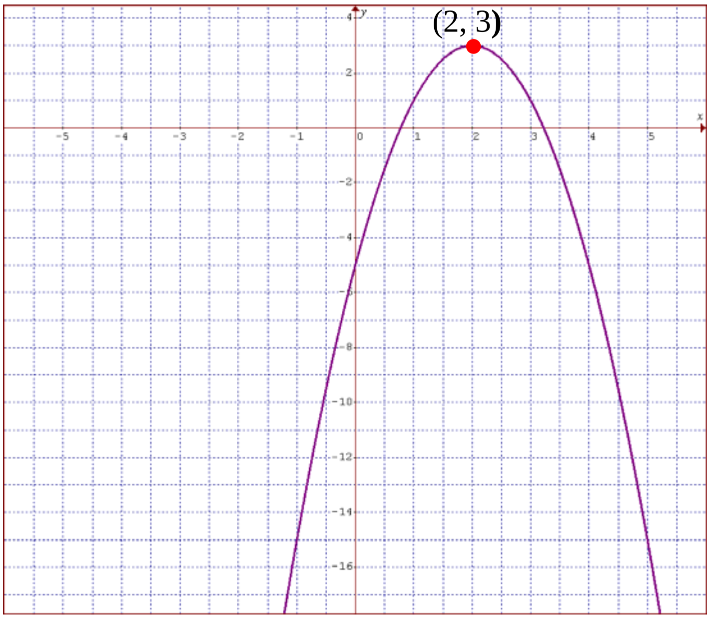
$$y=-2x^2+8x-5=-2\left(x^2-4x+4\right)-5+8$$

$$=-2\left(x-2\right)^2+3$$

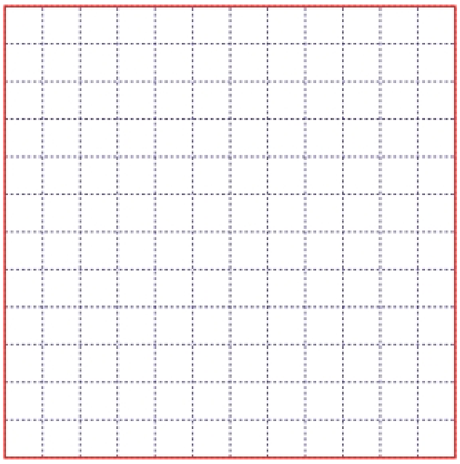
圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在(2, 3)，且以直線 $x=2$ 爲對稱軸。由下表：

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-15	-5	1	3	1	-5	-15

我們可以繪製出 $y=-2x^2+8x-5$ 的圖形如下：



【類題練習 9】描繪 $y=-x^2+6x-5$ 的圖形。



【重點整理】

1. 對於 a、b、c 三個常數，其中 $a \neq 0$，我們稱形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數為二次函數。
2. 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 可以用配方法改來寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$、$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。
3. 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形為拋物線，頂點坐標為 (h, k)；對稱軸方程式為 $x=h$。
4. 對二次函數 $y=ax^2+bx+c$，
   (1) 若 x^2 項的係數大於 0，則拋物線的開口向上；若 x^2 項的係數小於 0，則拋物線的開口向下；
   (2) 若 x^2 項的係數絕對值越大，則開口越小；若 x^2 項的係數絕對值越小，則開口越大。

【家庭作業】

基礎題

1. 在坐標平面上畫出 $y=-3(x-1)^2+1$ 的圖形。

2. 求 $y=-2x^2-4x$ 的頂點坐標及它對稱軸方程式。

3. 求 $y=5x^2-10x+2$ 的頂點坐標及它對稱軸方程式。

進階題

4. 將 $y=-2(x-1)^2+3$的圖形沿鉛直方向向下移動多少個單位長，圖形可與 x 軸相切？

5. 將 $y=-3(x-2)^2+1$的圖形沿水平方向向右移動 3 個單位長；並沿鉛直方向向下移動 2 個單位長，所得的圖形爲哪一個函數的圖形？

6. 固定函數 $y=-2x^2+6x-3$的圖形頂點，將圖形旋轉180°，所得的圖形爲哪一個函數的圖形？

6-4 二次函數的最大值與最小值

由 6-3 節的說明，我們知道：(1)當 $a>0$ 時，$a(x-h)^2+k\geq k$，所以函數的值永遠不小於 k。並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k。因此，函數的**最小值**爲 k；同理，(2)當 $a<0$ 時，$a(x-h)^2+k\leq k$，函數的值永遠不大於 k。並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k。因此，函數的**最大值**爲 k。

讓我們來看下面幾個例子。

【範例 1】有一農夫用 100 公尺的籬笆圍成一個矩形的菜園。試問如何圍成面積最大的菜園？

【解】 設菜園的某一邊長爲 x 公尺。因此另一邊長爲$(50-x)$公尺。
我們若以 y 平方公尺來表示此菜園的面積，則依題意可列式

$$\begin{aligned} y &= x(50-x)=50x-x^2 \\ &= -(x^2-50x+625)+625 \\ &= -(x-25)^2+625 \end{aligned}$$

當 $x=25$ 時，$y=625$ 爲最大值，即
當菜園一邊的邊長爲 25 公尺，而另一邊也爲 $50-25=25$ 公尺時，能圍出面積最大的菜園。換句話說，所圍出面積最大的菜園是一個邊長爲 25 公尺的正方形。

因爲菜園的邊長必爲正數，所以 $x>0$ 且 $50-x>0$，得 x 值的範圍爲 $0<x<50$，而長度大於 0 是很自然的事，所以，以 $x<50$ 表示 x 值的範圍即可，並且範例 1 中的答案發生在 $x=25$，符合 x 的範圍限制，因此，

矩形菜園面積$\leq$625 平方公尺

【類題練習 1】某人想用一條 200 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何圍出面積最大的停車場，並求出此停車場的面積。

【範例 2】已知兩數和爲 50。試問兩數乘積的範圍。

【解】 假設其中一數爲 x，且以 y 表示兩數的乘積。因爲兩數和爲 50，所以另一數爲 $50-x$。

依題意可列式： $y=x(50-x)=-(x-25)^2+625$

在本題中 x 可以爲任意實數，

因此，兩數乘積的範圍爲所有小於或等於 625 的數。

由範例 1 和範例 2，我們觀察到：依題意所列出的式子都是

$$y=x(50-x)=50x-x^2 。$$

但是隨著題意情境的不同，變數 x 的範圍及 y 值的範圍也會隨著變化。所以討論函數時，要注意 x 的範圍及 y 值的範圍。

在高中課程中，我們稱自變數 x 的範圍爲函數的定義域，且其所對應的 y 值範圍爲函數的值域。在範例 1 中的定義域爲大於 0，且小於 50 的數，也可以集合$\{x \mid 0<x<50\}$表示；而值域爲大於 0，且小於或等於 625 的數，也可以集合$\{y \mid 0<y\le 625\}$表示。在範例 2 中的定義域爲任意實數，也可以集合$\{x \mid x$ 爲任意實數$\}$表示；而值域爲小於或等於 625 的數，也可以集合$\{y \mid y\le 625\}$表示。

【範例 3】如何把 12 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

【解】 設其中一數爲 x，則另一數爲 $12-x$。若以 y 表示這兩數的平方和，可得

$$\begin{aligned} y &= x^2+(12-x)^2 \\ &= x^2+144-24x+x^2 \\ &= 2x^2-24x+144 \\ &= 2(x^2-12x+36)-72+144 \\ &= 2(x-6)^2+72 。\end{aligned}$$

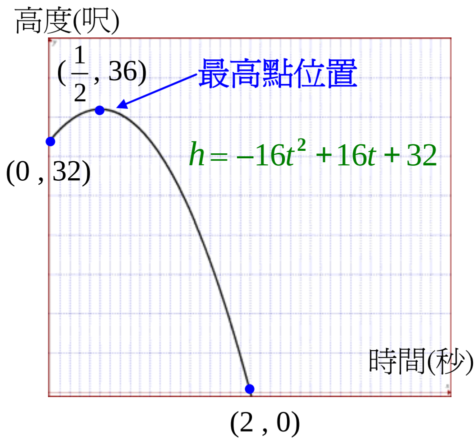
當 $x=6$ 時，另一數爲 $12-6=6$，即是把 12 分成 6 和 6 時，兩數的平方和爲最小，且其值爲 72。

【類題練習 2】(1) 如何把 20 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

(2) 如何把 20 分成兩數，使得這兩數的乘積最大？

我們再引下面的例子來探討二次函數圖形在物理學上的應用。

【範例 4】 在時間 $t=0$ 秒時，某位跳水選手從高為 32 呎的平台跳下(如右圖)。已知在時間為 t 秒時高度為 $h=-16t^2+16t+32$ (呎)，請問什麼時候達到最高點，並求出最高點的位置。



【解】 由 $h=-16t^2+16t+32$

$$=-16(t-\frac{1}{2})^2+36，$$

可知，當 $t=\frac{1}{2}$ 時，$h=36$ 為最大值。

所以，在起跳後 $\frac{1}{2}$ 秒時，達到最高點位置：高為 36 呎的地方。

在範例 4 中，h 的最大值為 36，也就是說，最高點位置在高為 36 呎的地方。於是，我們知道，若沒有規範自變數的範圍，則函數的極大值或極小值為頂點的 y 坐標。

有時候，我們需要判斷函數值是否恆為正或恆為負，例如，在前面的單元提到，當 $x\geq 1$ 時，函數 $g(x)=\sqrt{x-1}$ 有意義。同樣的，若要討論 $h(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$ 必須有意義，則 x 的範圍為何？當然，我們可以利用配方法將 x^2-3x+4 化成 $(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$，所以 x^2-3x+4 恆大於或等於 $\frac{7}{4}$。因此，對任意實數 x，$h(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$ 都有意義。

另外，我們也可以利用拋物線的圖形來理解二次函數值恆為正或恆為

負的性質，例如 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$，的圖形爲拋物線，$y=0$ 的圖形爲 x 軸，若將兩個式子聯立求解，並以代入消去法得到式子 $ax^2+bx+c=0$，所得的解即爲拋物線與 x 軸的交點，倘若二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式 $b^2-4ac<0$，則表示拋物線與 x 軸沒有交點。因此我們得到下列的結論：

對於二次函數 $y=ax^2+bx+c$，

若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸上方，且 $y=ax^2+bx+c$ 恆大於 0；

若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸下方，且 $y=ax^2+bx+c$ 恆小於 0。

【範例 5】 判斷下列二次函數的值是否恆爲正或恆爲負。

（1） $f(x)=2x^2-3x+4$　　（2） $g(x)=-2x^2+x-4$

【解】

（1） $f(x)=2x^2-3x+4$，$a=2>0$，$b=-3$，$c=4$。

判別式 $b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(4)=-23<0$，

所以 $f(x)=2x^2-3x+4$ 恆爲正。

（2） $g(x)=-2x^2+x-4$，$a=-2<0$，$b=1$，$c=-4$。

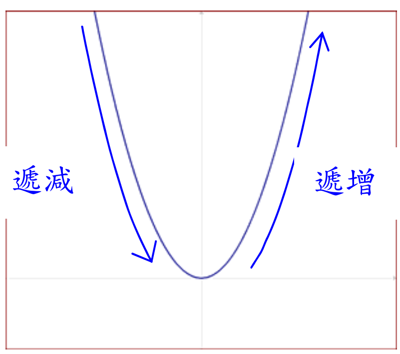
判別式 $b^2-4ac=1^2-4(-2)(-4)=-31<0$，

所以 $f(x)=2x^2-3x+4$ 恆爲負。

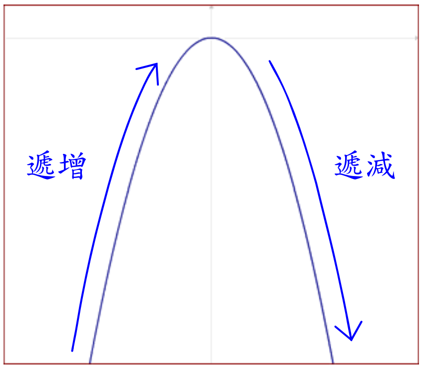
【類題練習 3】 判斷下列二次函數的值是否恆爲正或恆爲負。

(1) $f(x)=2x^2+4x-3$　　(2) $g(x)=-x^2+3x-5$

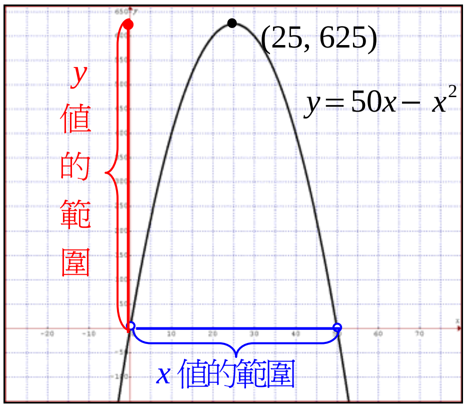
在二次函數的圖形中，對稱軸將拋物線分割成兩個全等的圖形，由圖形我們觀察出，無論圖形凹向上或凹向下，隨著 x 值增加，對稱軸兩側的的函數值會隨之增加或減少，而函數值固定增加與減少的分野正是拋物



線的頂點。我們稱隨著 x 值增加，函數值會隨之增加者為**遞增**函數；反之，稱隨著 x 值增加，函數值會隨之減少者則為**遞減**函數。



在前面的內容中，我們數度提到定義域與值域的範圍，例如，在範例 1 中，函數的定義域為$\{x \mid 0<x<50\}$，值域為$\{y \mid 0<y\le 625\}$，極大值發生在拋物線的頂點。但是，有時候函數的極大值卻不發生在拋物線的頂點，我們來看下面的例子。



【範例 6】某旅行社以限乘 35 人的巴士，招攬國內旅遊團，目前已有 30 名旅客報名參加，每人須繳交旅費 1000 元，若以每增加一名旅客，則每一名旅客減收 20 元旅費的方式，繼續招攬旅客，則旅行社最多可收取多少團費？

【解】 假設增加 x 名旅客，旅行社收取團費共 y 元，

則 $y=(30+x)(1000-20x)$

$=-20x^2+400x+30000$

$=-20(x-10)^2+32000$

若 $x=10$ ， $y=32000$ ，也就是說增加 10 名旅客，團費為 32000 元，但巴士限乘 35 人，所以最多只能再增加 5 名旅客，因此，當 $x=5$時，能使$-20(x-10)^2+32000$為符合題意的最大值，

即 $y=-20(5-10)^2+32000=31500$。

所以，旅行社最多可收取團費 31500 元。

【類題練習 4】 二次函數 $y=x^2-4x+3$，若 $-5\le x\le 1$，求此函數的最大值和最小值。

【重點整理】

1. 對於二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，
   (1) 當 $a>0$ 時，$a(x-h)^2+k\ge k$，函數的最小值為 k；
   (2) 當 $a<0$ 時，$a(x-h)^2+k\le k$，函數的最大值為 k。
2. 對於二次函數 $y=ax^2+bx+c$，
   (1) 若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸上方，$y=ax^2+bx+c$ 恆大於 0；
   (2) 若 $a<0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸下方，$y=ax^2+bx+c$ 恆小於 0。
3. 當函數值 y 隨著 x 值增加而增加者，稱為遞增函數；反之，當函數值 y 隨著 x 值增加而減少者則稱為遞減函數。

【家庭作業】

基礎題

1. 某人想用一條 300 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何圍出最大面積的停車場，並求出此停車場的面積。
2. 如何把 30 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？
3. 如何把 30 分成兩數，使得這兩數的乘積最大？
4. 在時間 $t=0$ 秒時，某位跳水選手從高為 36 呎的平台跳下。已知時間為 t 秒時的高度為 $h=-18t^2+18t+36$（呎），請問什麼時候達到最高點，並求出最高點的位置。
5. 二次函數 $y=2x^2-4x+6$，若 $2\le x\le 5$，求函數的最大值和最小值。

進階題

6. 已知$y=-x^2+x+m$的最大值爲$\frac{7}{4}$，求 m 的值。
7. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過(0, 1)，且當 $x=3$時，$f(x)$的最小值爲-2，求$a+b-c$的值。
8. 求$x^2+2y^2+z^2-6x+4y-10z+13$的最小值。
9. 在數線上，已知兩點$A(2)$、$B(8)$，若 P 點代表的數爲 x。
   試回答下列各問題：
   ① 將$y=2\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$表成$x$的二次式。
   ② 將y化成$a(x-h)^2+k$的形式。
   ③ 若x爲整數，求y的最小值。