四、一元二次方程式

就一般而言，凡是使得方程式等號成立的數稱之爲方程式的**解**；而使得多項式的值爲零的數稱之爲多項式的**根**。因此，一元二次方程式的解就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解爲根。

我們將先介紹常見的一元二次方程式的三種解法：**因式分解法**、**配方法**和**公式解**，然後在 4-2 節中利用判別式來探討兩根的特性，至於根與係數之間的關係，則在附錄二中討論。

4-1 一元二次方程式的解法

【因式分解法】

因爲一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a、b 和 c 爲實數且 $a\neq 0$）的左式爲二次多項式，如果我們能將這個多項式因式分解成兩個一次多項式的乘積，就很容易求得方程式的解。我們以下面的例子來說明這種解法。

【範例 1】 求 $2x^2+1=5x-1$ 的解。

【解】 利用移項可把原方程式改寫爲 $2x^2-5x+2=0$。

由因式分解，可得 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

因此，原方程式改寫爲 $(2x-1)(x-2)=0$

所以，可得 $2x-1=0$ 或 $x-2=0$

即 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$。

【類題練習 1】 求 $3x^2+10x+3=0$ 的解。

【配方法】

我們也可以利用配方及平方根的概念來解方程式，例如將 $x^2-4x+2=0$ 改寫爲 $(x-2)^2-2=0$ 的形式，進而解得 $x=2\pm\sqrt{2}$。其過程如下：

配方 $\quad x^2-4x+2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+2=0$

即 $\quad \Rightarrow (x-2)^2-2=0$

左式可寫成完全平方式 $\quad \Rightarrow (x-2)^2=2$

∵右式爲正，兩邊開平方 $\quad \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{2}$

$\quad \Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

上面的例子是先利用配成完全平方式的方法，將方程式改寫成 $(x-h)^2=k$ 的形式。當 $k\ge 0$ 時，我們就可以利用平方根的概念來解題：

$$(x-h)^2-k=0$$

即 $\quad (x-h)^2=k\ge 0$

兩邊同時開方 $\quad \Rightarrow x-h=\pm\sqrt{k}$

移項 $\quad \Rightarrow x=h\pm\sqrt{k}$

註：$x=h\pm\sqrt{k}$ 表示 $x=h+\sqrt{k}$ 或 $x=h-\sqrt{k}$。

我們將這個方法稱爲配方法，也就是配成完全平方的意思。

【範例 2】求下列各方程式的解：

(1) $x^2-6x+8=0$ (2) $2x^2+4x-6=0$

【解】 (1) $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+8=0$

$\Rightarrow (x-3)^2-1=0$

$\Rightarrow (x-3)^2=1$

$\Rightarrow x-3=\pm 1$

$\Rightarrow x-3=1$ 或 $x-3=-1$

$\Rightarrow x=4$ 或 $x=2$

(2) $2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot 1+1-1-3=0$

$\Rightarrow (x+1)^2-4=0$

$\Rightarrow (x+1)^2=4$

$\Rightarrow x+1=\pm 2$

$\Rightarrow x+1=2$ 或 $x+1=-2$

$\Rightarrow x=1$ 或 $x=-3$

在上例中，我們當然也可用十字交乘法來做因式分解。但下面的例題，因不易做因式分解，所以配方法會成為一個很好用的解法。

【範例 3】求下列各方程式的根：

(1) $x^2-6x+2=0$　　(2) $3x^2+5x-4=0$

【解】　(1) $x^2-6x+2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+2=0$

$\Rightarrow (x-3)^2-7=0$

$\Rightarrow (x-3)^2=7$

$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{7}$

$\Rightarrow x-3=\sqrt{7}$ 或 $x-3=-\sqrt{7}$

$\Rightarrow x=3+\sqrt{7}$ 或 $x=3-\sqrt{7}$

註：我們常以 $x=3\pm\sqrt{7}$ 來表示 $x=3+\sqrt{7}$ 或 $x=3-\sqrt{7}$ 。

(2) $3x^2+5x-4=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2-(\frac{5}{6})^2-\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2-\frac{73}{36}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2=\frac{73}{36}$

$\Rightarrow x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{73}}{6}$

$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$

【類題練習 2】利用配方法求下列各式的解：

(1) $x^2-3x-1=0$　　(2) $4x^2-3x-2=0$

【想想看】在範例 3 第(1)題中，

兩個根的和為$(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=6$，

兩個根的積為$(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})=3^2-(\sqrt{7})^2=9-7=2$。

在範例 3 第(2)題中，

兩個根的和為$\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}+\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=-\dfrac{5}{3}$，

兩個根的積為$\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}\times\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=\dfrac{5^2-(\sqrt{73})^2}{6^2}$

$$=-\frac{48}{36}=-\frac{4}{3}\text{。}$$

同學們能看出這兩個方程式的兩根和與積似乎和方程式的係數之間有著某種關係嗎？

【公式解】

將配方法運用在一般式$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$的求解時，其步驟如下：

方程式	$ax^2+bx+c=0$	$(a\neq 0)$
兩邊同除以a	$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$	
配方	$x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{b}{2a}+(\dfrac{b}{2a})^2-(\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{c}{a}=0$	
化簡	$(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$	
左式可化為完全平方	$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	

這個結果與前面$(x-h)^2=k$的形式相同，因為$(x+\dfrac{b}{2a})^2$恆為正數或 0，所以當$b^2-4ac\geq 0$時，我們得到

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\text{ ，}$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{（或寫成 }x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{）。}$$

也就是說，當$b^2-4ac\geq 0$時，方程式$ax^2+bx+c=0$的解爲：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 。}$$

雖然利用配方法解一元二次方程式的程序較爲複雜，但觀察其過程，每一步驟都有跡可循。若避開繁複的運算過程，直接將方程式的係數代入這個解的通式，即可得到方程式的解。因此，我們利用上面的通式求解，稱爲**公式解**。

雖然我們將在下一節中，才會完整的討論如何由b^2-4ac的符號來了解方程式$ax^2+bx+c=0$兩個根的特性，在這裡仍先稱b^2-4ac爲方程式**根的判別式**。

【範例 4】用公式解求$x^2-6x+2=0$的解。

【解】 先檢驗判別式是否大於 0 或等於 0。因爲$b^2-4ac=28>0$，所以方程式有實數解。由公式解得知：

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-6)\pm\sqrt{28}}{2\times 1}\\&=\frac{6\pm 2\sqrt{7}}{2}\\&=3\pm\sqrt{7}\end{aligned}$$

【類題練習 3】利用公式解下列方程式：

(1) $x^2-3x-1=0$　　(2) $4x^2-3x-2=0$

我們可以利用一元二次方程式的解法，來解某些特殊類型的方程式，現在來看下面的例子。

【範例 5】已知一個正數比其倒數的兩倍多 1，求此數。

【解】 設此正數為 x。

依題意列式 $x-2\cdot\frac{1}{x}=1$

兩邊同乘以 x，得 $x^2-2=x$

移項得一元二次方程式 $x^2-x-2=0$

$\because$ $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$

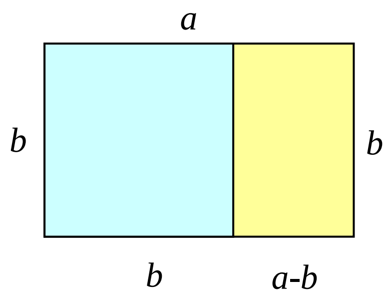
$\therefore$ $x=2$ 或 $x=-1$（不合題意）

所以，此正數為 2。

【類題練習 4】解方程式 $3x+\frac{2}{x}=6$。

【範例 6】一個長為 a，寬為 b 的矩形，如果它的長與寬滿足 $\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}$ 的關係，我們稱之為「**黃金矩形**」。求黃金矩形的長與寬的比值為何？

【解】 令 $\frac{a}{b}=x$。



$\because$ $\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{a}{b}-1$

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}-1\Rightarrow\frac{1}{x}=x-1$

再來解分式方程式 $\frac{1}{x}=x-1$。

兩邊同乘以 x，得 $1=x^2-x$

移項得 $x^2-x-1=0$

利用根的公式，可得

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

所以，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$或$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(負的不合)。

因此，長與寬的比值爲$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(約爲 1.6)。

【類題練習 5】解方程式$\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{13}{6}$。

【重點整理】

1. 一元二次方程式的解法中常用的有因式分解法、配方法及公式法。
2. 一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的根的公式爲$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
3. 形如$ax+\dfrac{b}{x-c}=d$的分式方程式，可用通分或去分母化成一元二次方程式來求解，但須注意求得的解應檢驗是否使分母爲 0。

【家庭作業】

基礎題

1. 解下列各方程式：

① $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{6}x-1=0$　　② $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$

③ $x^2+3=6x$　　④ $-0.5x-0.1x^2=0.5$

2. ① 已知$3x^2-6x-21$可化為$3(x+p)^2+q$的形式，求p、q的值。

② 利用①求方程式$3x^2-6x-21=0$的兩根。

進階題

3. 已知$-\frac{1}{2}$為$ax^2+3x-a=0$的一根，求a的值及另一根。

4. 設$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$為方程式$4x^2+4x+c=0$的一根，求c的值。

5. 解下列各方程式：

① $\frac{x+5}{7}=\frac{1}{x-1}$　② $x+\frac{2}{x-2}=5$　③ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

6. 若x滿足$x+\frac{1}{x}=-4$，求$x-\frac{1}{x}$的值。

7. 已知某水果商人以 6000 元買進芒果一批。淘汰賣相不佳的芒果 30 公斤，其餘的以每公斤按成本價加 10 元賣出，商人共得款 8100 元。問此商人原先買進芒果多少公斤？

4-2 根的判別

在前一節中，我們利用配方法將方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$改寫為 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。因為$(x+\frac{b}{2a})^2$恆為正數或 0，所以右式$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$中的分子$b^2-4ac$必須為正數或 0 時，此方程式才會有實數解。當$b^2-4ac<0$時，我們不可能找到一個實數 x 使得$(x+\frac{b}{2a})^2$等於$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，所以此方程式沒有實數解。因此，一個一元二次方程式有沒有實數解，便可由$b^2-4ac\geq 0$，或$b^2-4ac<0$來判別，故稱b^2-4ac為「**根的判別式**」或簡稱為「**判別式**」。

現在將方程式$ax^2+bx+c=0$根的判別規則整理如下：

(1) 若$b^2-4ac>0$，則方程式的兩根為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

因為兩根均為實數且不相等，所以稱此方程式有**兩個相異實根**。

(2) 若$b^2-4ac=0$，則兩根為相等實數。所以稱此方程式有**兩個相等實根**，或稱此方程式有一個**二重根**，並常以 $x=-\frac{b}{2a}$ (**重根**)來表示。

(3) 若$b^2-4ac<0$，則此方程式**無實根**。

【**範例 1**】判別下列方程式是否有兩個相異實根，一個二重根或沒有實數根：

(1) $x^2+3x-5=0$　(2) $2x^2-5x+6=0$　(3) $-x^2+6x-9=0$

【**解**】 (1) $\because$ 判別式$b^2-4ac=3^2-4\times 1\times(-5)=29>0$

$\therefore$ 方程式有兩個相異實根：

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-5)}}{2\times 1}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

(2) $\because$ 判別式$b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times 6=-23<0$

$\therefore$ 方程式沒有實數根

(3) $\because$ 判別式$b^2-4ac=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$

$\therefore$ 方程式有一個二重根：

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-9)}}{2\times(-1)}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{-2}=3(\text{重根})$$

【類題練習 1】判別下列方程式是否有兩個相異實根，一個二重根或沒有實數根：

(1) $2x^2-4x+1=0$　　(2) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=0$

(3) $(a+1)x^2+4x+2=0$，其中 $a>1$。

【範例 2】已知一元二次方程式$ax^2+ax+2=0$有一個二重根，求 a 的值。

【解】 原方程式有一個二重根$\Rightarrow$判別式等於 0

即 $a^2-4\cdot a\cdot 2=0\Rightarrow a(a-8)=0$

$\Rightarrow a=0$或$a=8$

因爲二次項係數 a 不能爲 0，所以 $a=8$。

【類題練習 2】已知 a 爲正整數且方程式$x^2-ax+3=0$有兩個相異根，求 a 的最小值。

在高一上的第一章中，同學們會學習複數(complex number)的記法 $a+bi$，其中 a、b 爲實數，且$i^2=-1$，也就是說，$\sqrt{-1}=i$。所以，範例 1 第(2)題中的方程式$2x^2-5x+6=0$沒有實數根，但是 $x=\frac{5\pm\sqrt{23}i}{4}$是這個方程式的複數根。

【重點整理】

1. $ax^2+bx+c=0$的根有下列性質：
   (1) 若$b^2-4ac>0$，兩根爲相異實根；
   (2) 若$b^2-4ac=0$，兩根爲重根；
   (3) 若$b^2-4ac<0$，無實根。

【家庭作業】

基礎題

1. 判別下列方程式兩根的性質：

① $x^2-8x-20=0$　　② $6x^2-7x+3=0$

③ $16x^2+8x+1=0$　　④ $x^2+3=0$

⑤ $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{16}=0$　　⑥ $2x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

進階題

2. 設 a 爲任意實數，請問$x^2+2ax+a=1$兩根的性質爲何？

3. 設 m、n 爲相異兩數，請判別$(m^2+n^2)x^2+2(m+n)x+2=0$兩根的性質。

4. 若方程式$3x^2+4x+2(k-1)=0$有實根，則最大的整數 k 值爲何？

5. 已知$3x^2+(k-24)x+k=0$有一個二重根，求 k 的值。

6. 已知一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的係數滿足$ac<0$，則此方程式有幾個實根？