三、平方根

在本章中，我們將介紹平方根及學習平方根的四則運算與根式中分母的有理化，並介紹雙重根式的化簡。

3-1 認識平方根

對於一個正數a，如果b的平方等於a，即$b^2=a$，我們就稱**b是a的平方根**又稱**二次方根**。例如：3 的平方等於 9，所以稱 3 是 9 的平方根。另外，因為$(-3)^2=9$，所以-3 也是 9 的平方根。由此，我們知道 9 的平方根有 3 和-3。

在國中階段，我們引進符號「$\sqrt{\ }$」，讀作「**二次根號**」，或簡讀作「**根號**」，來表示一個正數的平方根：對於任何一個正數 a，

$\sqrt{a}$ (讀作根號 a)表示 a 的正平方根；

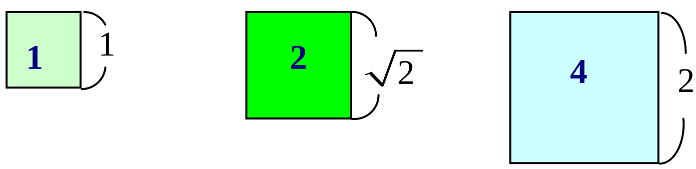
$-\sqrt{a}$ (讀作負根號 a)表示 a 的負平方根。

例如：4 的平方根記作$\pm\sqrt{4}$，即$\sqrt{4}=2$ 及$-\sqrt{4}=-2$。也就是說，由平方根的定義，$(\sqrt{a})^2=a$ 、$(-\sqrt{a})^2=a$ 。當 $a=0$ 時，a 的兩個平方根都為 0。

此外，在$\sqrt{a}$中，我們稱 a 為**被開方數**。例如：$\sqrt{1}$的被開方數為 1，而$\sqrt{1}=1$；$\sqrt{9}$的被開方數為 9，而$\sqrt{9}=3$。在本章中，除了在雙重根式的情形外，我們所討論的被開方數均為非負的有理數。

【平方根的近似值】

如果 a 不是某一個整數的平方時，如何求出它的平方根所表示的值呢？例如 2 不是某一個整數的平方，那麼，如何求出$\sqrt{2}$的值呢？我們先由下列三個面積分別為 1、2 和 4 平方公分的正方形來說明：



我們可看出這三個正方形依其面積的大小，由小至大依序排列，因此，它們的邊長的大小順序也應相同。因爲這三個正方形的邊長分別爲 1 公分、$\sqrt{2}$ 公分和 2 公分，所以，$\sqrt{2}$ 的值應介於 1 和 2 之間，即 $1<\sqrt{2}<2$。

若想進一步知道 $\sqrt{2}$ 的值爲何，我們可以將 1 和 2 之間作十等分，依序可得 1.1，1.2，1.3，1.4，1.5，1.6，1.7，1.8 和 1.9，並分別計算其平方：

$$1^2=1<2 \qquad (1.5)^2=2.25>2$$
$$(1.1)^2=1.21<2 \qquad (1.6)^2=2.56>2$$
$$(1.2)^2=1.44<2 \qquad (1.7)^2=2.89>2$$
$$(1.3)^2=1.69<2 \qquad (1.8)^2=3.24>2$$
$$(1.4)^2=1.96<2 \qquad (1.9)^2=3.61>2$$
$$2^2=4>2$$

我們可看出 $(1.4)^2<2<(1.5)^2$，所以 $\sqrt{2}$ 介於 1.4 和 1.5 之間，即

$$1.4<\sqrt{2}<1.5\text{。}$$

若再將 1.4 和 1.5 之間作十等分得 1.41，1.42，1.43，1.44，1.45，1.46，1.47，1.48 和 1.49 等九個二位小數，那麼，$\sqrt{2}$ 又介於哪兩個小數之間呢？事實上，由

$$(1.41)^2=1.9881<2$$
$$(1.42)^2=2.0164>2$$

可看出 $(1.41)^2<2<(1.42)^2$，因此 $\sqrt{2}$ 介於 1.41 和 1.42 之間，即

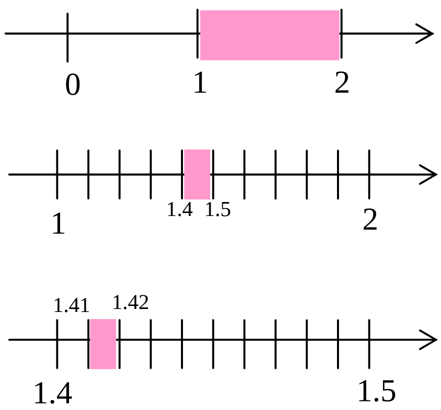
$$1.41<\sqrt{2}<1.42\text{。}$$

依照上面的方法繼續做下去，我們知道 $1.414<\sqrt{2}<1.415$，…，進而算出 $1.4142135<\sqrt{2}<1.4142136$。

如果我們想用**四捨五入法**取 $\sqrt{2}$ 的**近似值**到小數第二位，那麼就依上

面的方法算到小數第三位，然後再用四捨五入法取捨即可。也就是說，因爲 $1.414<\sqrt{2}<1.415$，所以取到小數第二位時，$\sqrt{2}$ 的近似值爲 1.41，記作 $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41$（讀作根號 2 約等於一點四一）。事實上，依這樣的步驟且取越多的小數位數時，我們所算出的近似值越接近 $\sqrt{2}$ 的值。

在上面求 $\sqrt{2}$ 的近似值的過程中，我們也可以用數線來說明。我們首先算出 $\sqrt{2}$ 介於兩個連續整數之間，即 $1<\sqrt{2}<2$，或者說，在數線上，$\sqrt{2}$ 的位置在 1 和 2 之間；接下來把 1 和 2 之間分成十等分，然後得出 $\sqrt{2}$ 在 1.4 和 1.5 之間；再把 1.4 和 1.5 之間分成十等分，並得出 $\sqrt{2}$ 介於 1.41 和 1.42 之間，⋯。



事實上，我們可將這樣逼近的過程看成是在數線上，利用「十等分」的方法逐漸接近 $\sqrt{2}$ 的位置，因此稱這樣的方法爲**十分逼近法**。

【範例 1】 以十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值（以四捨五入法取到小數第一位）。

【解】 由 $1^2=1$ 和 $2^2=4$，可得 $1^2<3<2^2$，因此 $1<\sqrt{3}<2$。

將 1 和 2 之間作十等分並計算 $(1.1)^2$，$(1.2)^2$，⋯，$(1.9)^2$ 的值如下：

$(1.1)^2=1.21<3$	$(1.6)^2=2.56<3$
$(1.2)^2=1.44<3$	$(1.7)^2=2.89<3$
$(1.3)^2=1.69<3$	$(1.8)^2=3.24>3$
$(1.4)^2=1.96<3$	$(1.9)^2=3.61>3$
$(1.5)^2=2.25<3$	

因此，$1.7<\sqrt{3}<1.8$。依題意，我們再將 1.7 和 1.8 之間作十等分，並計算 $(1.71)^2$、$(1.72)^2$、⋯的值如下：

$(1.71)^2=2.9241<3$，　　$(1.73)^2=2.9929<3$，

$(1.72)^2=2.9584<3$，　　$(1.74)^2=3.0276>3$，

所以，$1.73<\sqrt{3}<1.74$。因此，依題意取到小數第一位時，

$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$。

在範例 1 求$\sqrt{3}$的過程中，當已知$\sqrt{3}$介於 1 和 2 之間後，我們可先比較$(1.5)^2$和 3 的大小。因爲$(1.5)^2=2.25<3$，所以$\sqrt{3}$介於 1.5 和 2 之間。因此只須取$(1.6)^2$、$(1.7)^2$、⋯、$(1.9)^2$的值來做比較即可。有時候，這樣的方式可省去一些不必要的計算。

【類題練習 1】試以十分逼近法求$\sqrt{5}$的近似值（以四捨五入法取到小數第一位）。

事實上，除了利用十分逼近法之外，我們也可以用開方表或計算器來求得正數的平方根較準確的近似值。

我們再來看畢氏定理（又稱商高定理）和平方根的關係。由畢氏定理，我們知道：

任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。

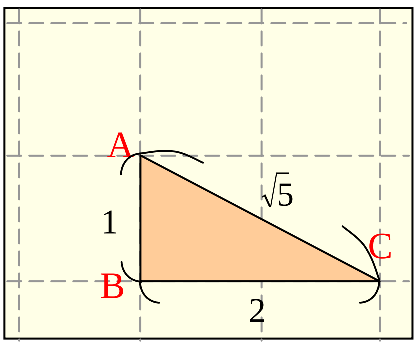
也就是說，若直角三角形的兩股長分別爲 a、b，斜邊長爲 c，那麼

$$a^2+b^2=c^2 \text{ ，或 } c=\sqrt{a^2+b^2} \text{ 。}$$

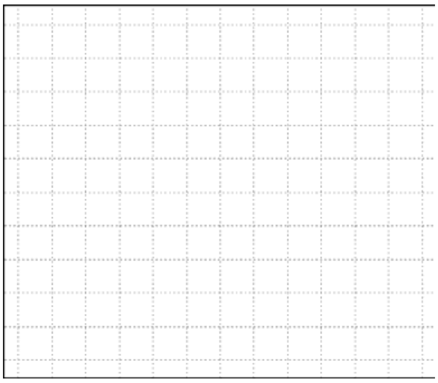
【範例 2】 在方格紙上，利用直角三角形，畫出一條長爲$\sqrt{5}$單位的線段。

【解】 因爲$1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$，所以，兩股長分別爲 1、2 的直角三角形，它的斜邊長即爲$\sqrt{5}$。

因此我們只需在方格紙上畫出兩股長分別爲 1 和 2 個單位長的直角三角形 ΔABC，如右圖，那麼其斜邊$\overline{AC}$即爲$\sqrt{5}$個單位長的線段。



【類題練習 2】在方格紙內，利用直角三角形畫出長度分別爲 $\sqrt{10}$ 和 $\sqrt{13}$ 個單位長的線段。



【想想看】給定一個正整數 n，如何利用尺規作圖畫出一條 $\sqrt{n}$ 個單位長的線段？

(提示：$1^2+1^2=2$，$1^2+(\sqrt{2})^2=3$，$1^2+(\sqrt{3})^2=4$，⋯)

【範例 3】(1) 已知某直角三角形中，兩股長分別爲 5 和 12，求斜邊長。

(2) 已知直角三角形的一股長爲 4，斜邊長爲 7， 求另一股長。

【解】 (1) 由 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，設 $a=5$，$b=12$，所以斜邊長

$c=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$。

(2) 設一股長 a 爲 4，斜邊長 c 爲 7，由 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，

可得另一股長 $b=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$。

【類題練習 3】(1) 已知某直角三角形中，兩股分別爲 2 和 5，求斜邊長。

(2) 已知直角三角形的一股長爲 5，斜邊長爲 8，

求另一股長。

【重點整理】

1. 每一個正數有兩個平方根，負數沒有平方根，而 0 的平方根就 0。
2. 我們可以用十分逼近法來求出平方根的近似值。
3. 已知直角三角形任意二邊的邊長時，可以利用畢氏定理求得第三邊的邊長。

【家庭作業】

基礎題

1. $\sqrt{3}-2$ 是正數還是負數？
2. $\sqrt{7}$ 介於哪兩個連續整數之間？
3. 以十分逼近法求 $\sqrt{13}$ 的近似值（以四捨五入法取到小數第一位）。
4. 引用畢氏定理的概念，繪出一條 $\sqrt{11}$ 個單位長的線段。
5. ① 已知某直角三角形中，兩股分別為 5 和 9，求斜邊長。

   ② 已知直角三角形的一股長為 5，斜邊長為 14，求另一股長。

3-2 平方根的運算

【平方根的乘法與除法】

我們首先來看如何做平方根之間的乘法及除法運算。假設 $a\geq 0$、$b\geq 0$。因爲

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\\ &= (\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})\\ &= (\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\\ &= ab，\end{aligned}$$

由定義我們知道 $(\sqrt{ab})^2=ab$，所以

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ 。$$

此外，假設 $b>0$，由 $(\frac{1}{\sqrt{b}})^2=\frac{1}{\sqrt{b}}\times\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{(\sqrt{b})^2}=\frac{1}{b}$，且 $(\sqrt{\frac{1}{b}})^2=\frac{1}{b}$，我們知道 $\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{b}}$。同樣的，我們可以得到

$$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ 。$$

在數學上，我們稱含有根號的算式爲**根式**。例如：$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 都是根式。事實上，形如 $\sqrt{a}$ 的數也稱爲根式。

【範例 1】計算下列根式：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{\frac{45}{4}}$

(3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\sqrt{\frac{6}{5}}\div\sqrt{\frac{2}{15}}$

【解】 (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}\times\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}\times\dfrac{45}{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

(4) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}\div\sqrt{\dfrac{2}{15}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}\div\dfrac{2}{15}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}\times\dfrac{15}{2}}=\sqrt{9}=3$

【類題練習 1】計算下列根式：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{\dfrac{27}{8}}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ (4) $\sqrt{\dfrac{15}{4}}\div\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

【最簡根式】

當一個整數 a 爲某個整數的平方時，我們就稱 a 爲**完全平方數**，也叫做**平方數**，例如：$81=9^2$，所以 81 爲完全平方數，因此 $\sqrt{81}=9$。另外，當被開方數是整數，且不是一個完全平方數時，我們可利用數的標準分解式及平方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡 $\sqrt{360}$ 時，我們先把 360 寫成標準分解式：

$$360=2^3\times3^2\times5=(2\times3)^2\times2\times5，$$

再化簡得到

$$\sqrt{360}=\sqrt{(2\times3)^2\times2\times5}=6\sqrt{10}。$$

爲方便以後做同類根式的加減運算，當被開方數爲有理數時，我們通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如：我們會將平方根

$\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$改寫成下列的形式：

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{（或}\frac{2}{3}\sqrt{6}\text{）}$$

也就是說，習慣上我們會將一個正有理數的平方根寫成$\frac{p}{q}\sqrt{n}$或$\frac{p\sqrt{n}}{q}$的形式，其中$\frac{p}{q}$爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除，我們稱這種形式的根式($\frac{p}{q}\sqrt{n}$ 或 $\frac{p\sqrt{n}}{q}$)爲「**最簡根式**」。例如：$6\sqrt{10}$ 和$\frac{2}{3}\sqrt{6}$都是最簡根式，但$\sqrt{360}$和$\sqrt{\frac{8}{3}}$就不是最簡根式。我們稱將平方根化成最簡根式的過程爲「**平方根化簡**」。

【範例 2】 將下列根式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{63}$　　(3) $\sqrt{\frac{45}{2}}$

【解】 (1) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{\frac{45}{2}}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3^2\times5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$

【類題練習 2】 將下列根式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{24}$　　(2) $\sqrt{180}$　　(3) $\sqrt{\frac{27}{2}}$　　(4) $\sqrt{\frac{75}{7}}$

當兩個根式經過化簡後，如果在它們的最簡根式的根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個平方根爲**同類方根**。例如：$2\sqrt{3}$ 、$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$（可化簡爲 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$）和 $-\sqrt{3}$ 都是同類方根，但 $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 就不是同類方根。

做根式的加減計算時，我們通常會將式中的每一項化爲最簡根式，再將同類方根合併。往後我們所稱的根式化簡是指將結果以最簡根式的形式表示。

【範例 3】化簡下列根式：

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}$　(2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{54}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【解】

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}=(-3+7)\sqrt{2}+(2-6)\sqrt{3}$

$=4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$=7\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{54}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{7\sqrt{6}}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

【類題練習 3】化簡下列根式：

(1) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}+7\sqrt{6}-4\sqrt{3}$　(2) $3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{45}+\sqrt{75}$

(3) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{\dfrac{7}{16}}+\sqrt{60}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

現在來看看如何做根式的乘積展開。事實上，我們常利用乘法公式

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

來展開形如

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$$

根式乘積的算式。

【範例 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$　　(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

【解】 (1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})=\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$$=\sqrt{12}+\sqrt{6}+\sqrt{18}+3$$

$$=3+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

(2) 利用平方差公式，可得

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2$$

$$=7-2=5。$$

【類題練習 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{75})$　　(2) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

【根式分母的有理化】

在根式中，如果分母含有根號，我們通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如：$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{3}{\sqrt{24}}=\frac{3\times\sqrt{24}}{\sqrt{24}\times\sqrt{24}}=\frac{3\times2\sqrt{6}}{24}=\frac{\sqrt{6}}{4}$。

如果根式的分母為兩項式且含有根號時，我們可以利用等值分數的概念和平方差公式，來將根式化成分母不含有根號的形式。例如；在$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$中，若對分子、分母同乘以$\sqrt{2}-1$，即可得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$=\sqrt{2}-1\text{。}$$

我們再用下面的例子來說明。

【**範例 5**】將下列各式化為分母不含根號的根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

【**解**】 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}=\dfrac{1\times(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)}$ (同乘以$\sqrt{2}-3$)

$$=\frac{\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2})^2-3^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-3}{2-9}$$

$$=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ (同乘以$\sqrt{3}+\sqrt{2}$)

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

我們稱將根式化為分母不含根號的形式的過程為**分母的有理化**。

【類題練習 5】有理化下列各根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{15}-3}$

【範例 6】有理化$\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。

【解】　因為 $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})=1-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1\times(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})}{(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})=2+\sqrt{2}$。

在範例 6 中，我們也可以將分子、分母同乘以 2，來將原根式化為 $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ 後，再做有理化。

【類題練習 6】有理化$\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$。

【雙重根式的化簡】

有時候，算式中會有形如$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 含有雙重根號的根式，我們稱這種形式的根式為**雙重根式**。事實上，我們可以嘗試利用完全平方公式，來做雙重根式的化簡。我們先以下面的範例來說明，再加以延伸。

【範例 7】展開下列各式：

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$　　　(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

【解】 (1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a+2\sqrt{ab}+b$$

$$=(a+b)+2\sqrt{ab}$$

(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a-2\sqrt{ab}+b$$

$$=(a+b)-2\sqrt{ab}$$

我們觀察到：如果設 $a=2$，$b=1$，那麼 $(\sqrt{2}+1)^2=(2+1)+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$。

事實上，由平方根的性質，我們知道 $\sqrt{a^2}=|a|$，而當 a 爲非負數時，$\sqrt{a^2}=a$。所以，我們先設 a、b 爲兩個非負的數，且 $a\ge b$ 來討論雙重根式的化簡過程：

由 $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(a+b)\pm2\sqrt{ab}$

可得 $\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

也就是說，如果 $\sqrt{x\pm2\sqrt{y}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$，(其中 $a\ge b$)，則 $x=a+b$，$y=ab$。

我們可以利用這個規則，試著作以下雙重方根的化簡。

【範例 8】化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ (2) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$

(3) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$ (4) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$

【解】 (1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5+2-2\sqrt{5\times2}}$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

(2) 根式中雖然沒有 $\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}$ 的形式，但是 $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，所以可以嘗試做化簡。

$$\sqrt{8+\sqrt{28}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{7+1+2\sqrt{7\times 1}}$$

$$= \sqrt{7}+\sqrt{1} = \sqrt{7}+1$$

(3) $\sqrt{14-8\sqrt{3}} = \sqrt{14-2\sqrt{48}}$ (先將$8\sqrt{3}$化成$2\sqrt{48}$)

$$= \sqrt{8+6-2\sqrt{8\times 6}}$$

$$= \sqrt{8}-\sqrt{6} = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

(4) $\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$$

由範例 8，我們觀察到：做雙重根式化簡時，可嘗試先將根式化成 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ 的形式後，再做化簡。

【類題練習 7】化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ (2) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$ (4) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

【想想看】在$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}\pm\sqrt{b}$中，為什麼要假設$a\geq b\geq 0$？

【重點整理】

1. 假設 $a \geq 0$、$b \geq 0$，$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。

2. 假設 $a \geq 0$、$b > 0$，$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 。

3. 我們可以將一個正有理數的平方根改寫成形如 $\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$ 或 $\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$ 的最簡根式，其中 $\dfrac{p}{q}$ 爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除。

4. 如果 $\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ，(其中 $a \geq b \geq 0$)，則 $x = a + b$ ， $y = ab$ 。

【家庭作業】

基礎題

1. 化簡下列各式：

① $\sqrt{162}$　② $\sqrt{250}$　③ $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$　④ $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

2. 化簡下列各式：

① $\sqrt{3} \times \sqrt{18}$　② $\sqrt{\dfrac{7}{12}} \times \sqrt{\dfrac{10}{21}}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{50}} \times \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

④ $\sqrt{\dfrac{3}{5}} \div \sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{\dfrac{7}{11}} \div \sqrt{\dfrac{21}{44}}$

3. 化簡下列各式：

① $\sqrt{6}(\sqrt{18} - \sqrt{15})$　② $-4\sqrt{5} + 6\sqrt{3} + \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

③ $\sqrt{84} - \sqrt{54} - \sqrt{32} - \sqrt{18}$　④ $(\sqrt{95} + \sqrt{35})(\sqrt{95} - \sqrt{35})$

⑤ $(\sqrt{67}+7)(\sqrt{67}-7)$ ⑥ $(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)$

4. 化簡下列各式：

① $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ ② $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$

③ $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ ④ $\sqrt{18-8\sqrt{5}}$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{11}}$ ⑥ $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

⑦ $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ⑧ $\dfrac{29}{\sqrt{7}-6}$

進階題

5. 化簡下列各式：

① $\sqrt{\dfrac{14-2\sqrt{48}}{2}}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}}$ ④ $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

⑤ $\dfrac{1}{2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6. 已知$\sqrt{11}$的小數部份爲 a，求$\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{2}$的值。