二、因式分解

2-1 因式與倍式

如同因數與倍數的概念，如果代數式 **A** 可以寫成代數式 **B** 與代數式 **C** 的乘積，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}。$$

此時，我們說 **B** 與 **C** 是 **A** 的**因式**，而 **A** 是 **B** 與 **C** 的**倍式**。例如：由 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，可知 $x+1$ 與 $x+2$ 皆爲 x^2+3x+2 的因式，而 x^2+3x+2 爲 $x+1$ 與 $x+2$ 的倍式；由 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，可知 $x+y$ 與 $x-y$ 皆爲 x^2-y^2 的因式，而 x^2-y^2 爲 $x+y$ 與 $x-y$ 的倍式。下面就讓我們先從多項式的除法來認識因式與倍式。

【多項式的除法】

在小學時，我們會以下列的長除法（直式算法）來求出 58 除以 13 的商數爲 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r}
4\\
13\,\overline{)\,58}\\
52\\
\hline
6
\end{array}$$

同時，我們也知道：

$$58=13\times4+6$$

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式算法（長除法）；爲了簡化計算，也常使用分離係數法。事實上，這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

【範例 1】求 $(x^2+4x+2)\div(x+1)$ 的商式及餘式。

【解】　方法一：直式算法　　　　　方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{rr}
 & x+3 \\
x+1 & \overline{)\,x^2+4x+2} \\
x(x+1) \Longrightarrow & \underline{x^2+x} \\
 & 3x+2 \\
3(x+1) \Longrightarrow & \underline{3x+3} \\
 & -1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 1+3 \\
1+1 & \overline{)\,1+4+2} \\
 & \underline{1+1} \\
 & 3+2 \\
 & \underline{3+3} \\
 & -1
\end{array}
$$

答：商式爲 $x+3$，餘式爲 -1。

在自然數的除法，我們有下列的規則：

被除數 ＝ 除數 × 商數＋餘數，

其中，商數和餘數爲非負整數，且餘數小於除數。同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式，

其中，除式不爲零多項式，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數或爲零多項式。

在完成多項式的除法後，爲了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述「被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式」的概念來驗算。

例如：

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+3)+(-1) && \text{（除式×商式＋餘式）}\\
&= x^2+4x+3-1 \\
&= x^2+4x+2 && \text{（被除式）}
\end{aligned}
$$

【範例 2】求 $(2x^3+5x^2+x+5)\div(x+2)$ 的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{rr}
 & 2+1-1 \\
1+2 & \overline{)\,2+5+1+5} \\
 & \underline{2+4} \\
 & 1+1 \\
 & \underline{1+2} \\
 & -1+5 \\
 & \underline{-1-2} \\
 & 7
\end{array}
$$

答：商式爲 $2x^2+x-1$，餘式爲 7。

使用分離係數法時，當除式或被除式缺項時，需要補 0。

【範例 3】 求$(3x^2+2)\div(2x-1)$的商式及餘式。

【解】 因爲$3x^2+2=3x^2+0\cdot x+2$，所以用 $3+0+2$ 來表示 $3x^2+2$。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{3}{2}+\frac{3}{4} \\ \hline
2-1 & 3+0+2 \\
 & 3-\frac{3}{2} \\ \hline
 & \quad\ \frac{3}{2}+2 \\
 & \quad\ \frac{3}{2}-\frac{3}{4} \\ \hline
 & \qquad\ 2\frac{3}{4}
\end{array}
$$

答：商式爲$\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$，餘式爲$2\frac{3}{4}$。

【範例 4】 求$(6x^3-7x^2-4x+8)\div(3x^2+x-2)$的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2-3 \\ \hline
3+1-2 & 6-7-4+8 \\
 & 6+2-4 \\ \hline
 & \quad -9+0+8 \\
 & \quad -9-3+6 \\ \hline
 & \qquad\quad 3+2
\end{array}
$$

答：商式爲 $2x-3$，餘式爲 $3x+2$。

【範例 5】 求$(3x^3+8x^2+7x+2)\div(x^2+2x+1)$的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3+2 \\ \hline
1+2+1 & 3+8+7+2 \\
 & 3+6+3 \\ \hline
 & \quad\ 2+4+2 \\
 & \quad\ 2+4+2 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

答：商式爲 $3x+2$，餘式爲 0。

【類題練習 1】 求下列各除法運算的商式及餘式：

(1) $(2x^2+x+5)\div(x+3)$　(2) $(-6x^2+5x+1)\div(2x-1)$

(3) $(x^4-1)\div(x-1)$　(4) $(2x^2+5x)\div(x+5)$

當餘式為零多項式時，我們稱**除式整除被除式**，例如：在範例 5 中，x^2+2x+1 整除 $3x^3+8x^2+7x+2$。這時，x^2+2x+1 與 $3x+2$ 為 $3x^3+8x^2+7x+2$ 的因式，而 $3x^3+8x^2+7x+2$ 為x^2+2x+1 與 $3x+2$ 的倍式；而在範例 4 中，所得到的餘式 $3x+2$ 不為零多項式，所以 $3x^2+x-2$ 與 $2x-3$ 都不是 $6x^3-7x^2-4x+8$ 的因式。

我們知道兩個 x 的一次式乘積展開後成為 x 的二次多項式。反過來說，如果能將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式的乘積，我們稱這樣的過程為這個二次式的**因式分解**。

在高中的課程中，我們也會將一個多項式寫成幾個一次或二次的多項式的連乘積，這樣的過程也稱為這個多項式的因式分解。例如：

$$x^2-x-2 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x-1)(x-2)(x-3)$$

在國中階段做因式分解時，我們只考慮因式的係數為有理數（整數或分數）的情形。但從此以後，我們將不再要求因式的係數一定是有理數。在 2-2 至 2-4 節中，我們將介紹幾個常用的方法：**提公因式**、**分組分解**、**十字交乘**和**利用乘法公式**，並且在 2-5 節中補充利用配方法做因式分解。

【重點整理】

1. 判別兩多項式是否為因倍式關係時，可使用除法所得餘式是否為 0 來判斷。

【家庭作業】

基礎題

1. 求下列各除法運算的商式及餘式：

   ① $(9x^2+18x+8)\div(3x+4)$　　② $(7x^2+11x-3)\div(2x+3)$

   ③ $(x^3+1)\div(x-1)$　　④ $(x^3+2x-1)\div(x-5)$

   ⑤ $(x^4+2x^3-x+4)\div(x^2+3x-2)$　　⑥ $(x^4+1)\div(x^2-1)$

2. 已知$3x^3-6x+13=3(ax+b)(x^2-2x+2)+1$，求 a、b 的值。

3. 已知某多項式除以$(2x-1)$，可得商式(x^2-2x+1)，餘式 3，求此多項式。

4. 已知$4x^3-13x+k$可被$(2x+1)$整除，求 k 的值。

5. 已知一長方體的體積爲x^3+4x^2+x-6、長爲$x+3$且寬爲$x+2$，求此長方體的高。

進階題

6. 若多項式 A 除以$2x+1$得商式 B，餘式爲 3；多項式 B 除以$x-2$得餘式爲-2，求多項式 A 除以$(2x+1)(x-2)$所得的餘式。

7. 求以$x-1$除$(x^2-1)^{10}+x^2+x-1$所得的餘式。

2-2 提公因式作因式分解

【從各項提公因式】

如果發現多項式的每一項都有共同的因式時，我們可先將此公因式提出。

【範例 1】 因式分解下列多項式：

(1) x^2+5x　　(2) $(a-b)^2-2(a-b)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3$

【解】 (1) $x^2+5x=x\cdot x+5\cdot x=x(x+5)$

(2) $(a-b)^2-2(a-b)=(a-b)(a-b)-2(a-b)$

$=(a-b)[(a-b)-2]$

$=(a-b)(a-b-2)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3=(x-2y)^2-(x-2y)^3$

$=(x-2y)^2[1-(x-2y)]$

$=(x-2y)^2(1-x+2y)$

【類題練習 1】 因式分解下列多項式：

(1) $4x^2+6x$　　(2) $7(a+b)^2-3(a+b)$

(3) $(x-y)^2+(y-x)^3$

【分組提公因式】

當各項沒有公因式時，可嘗試分組或去括號重新分組，使得每組之間有公因式。

【範例 2】 因式分解下列多項式：

(1) x^3+x^2+x+1　　(2) $2xy+5x+4y+10$

(3) $2ax^2-3x+2ax-3$　　(4) $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$

【解】 (1) $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(x^2+1)$

(2) 方法一：

$$2xy+5x+4y+10=(2xy+5x)+(4y+10)$$
$$=x(2y+5)+2(2y+5)$$
$$=(2y+5)(x+2)$$

方法二：

$$2xy+5x+4y+10=(2xy+4y)+(5x+10)$$ （交換律）
$$=2y(x+2)+5(x+2)$$
$$=(x+2)(2y+5)$$

(3) 方法一：

$$2ax^2-3x+2ax-3=(2ax^2-3x)+(2ax-3)$$
$$=x(2ax-3)+(2ax-3)$$
$$=(2ax-3)(x+1)$$

方法二：

$$2ax^2-3x+2ax-3=(2ax^2+2ax)-(3x+3)$$
$$=2ax(x+1)-3(x+1)$$
$$=(x+1)(2ax-3)$$

(4) 可嘗試去括號展開後，再重新分組。

$$xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)=xy+xyz^2+zx^2+zy^2$$
$$=(xy+zx^2)+(xyz^2+zy^2)$$
$$=x(y+zx)+yz(xz+y)$$
$$=x(y+xz)+yz(y+xz)$$
$$=(y+xz)(x+yz)$$

【類題練習 2】因式分解下列多項式：

(1) x^3-x^2+x-1 (2) $2xy-3x+4y-6$

(3) $5ax^2-2x+5ax-2$ (4) $ab(1-c^2)+c(a^2-b^2)$

從前面的例子我們可以看出，某些多項式可能有不只一種分組的方式來做因式分解。

【重點整理】

1. 若代數式各項有公因式時，先將此公因式提出來做因式分解。
2. 若代數式各項沒有公因式時，可嘗試分組或去括號重新分組，再提公因式來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列多項式：

① $2x-ax$　　② $3a^2b+6ab^2$

③ $x(x+2)-2x$　　④ $(a-2)(b+3)+4(2-a)(3+b)$

⑤ $3(a-3)-(a^2-3a)$　　⑥ $2ab-a+6b-3$

進階題

2. 因式分解下列多項式：

① $(x-2)^2+2x-4$　　② $(x-2)^3+(2-x)(x^2-4x+1)$

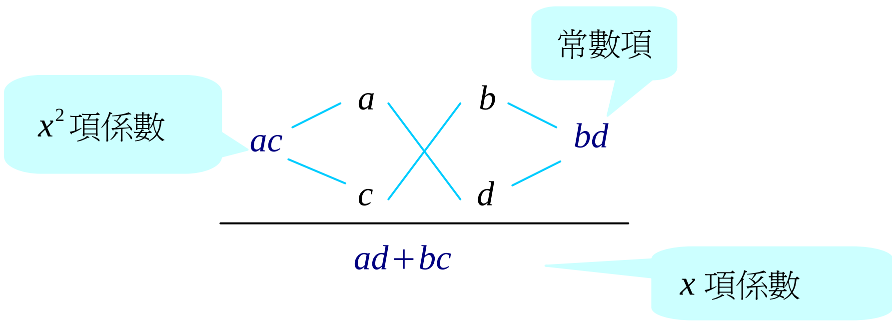
③ $(ax-bx)^2-(b-a)^3x$　　④ x^3+2x^2+2x+1

2-3 十字交乘法作因式分解

在多項式的乘法運算中，我們學過

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd \text{ ，}$$

其中各項的係數可以用十字交乘的方式來求得



因此，我們可以嘗試利用上面的方法來因式分解二次多項式。

【範例 1】因式分解下列多項式：

(1) x^2-x-90　　　　(2) $6x^2y^2+xy-15$

【解】　(1) $x^2-x-90=(x+9)(x-10)$

$$\begin{array}{ccc} x & & +9 \\ & \times & \\ x & & -10 \end{array}$$

(2) $6x^2y^2+xy-15=(3xy+5)(2xy-3)$

$$\begin{array}{ccc} 3xy & & +5 \\ & \times & \\ 2xy & & -3 \end{array}$$

【類題練習 1】因式分解下列多項式：

(1) $5x^2+2x-51$　　　　(2) $380-x-x^2$

【範例 2】因式分解下列多項式：

(1) $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$　　　　(2) $x^2+\frac{10}{3}x+1$

【解】 (1) 方法一: $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=x^2+(1+\frac{1}{3})x+(1\cdot\frac{1}{3})$

$$=(x+1)(x+\frac{1}{3})$$

$$\begin{array}{ccc} x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +1/3 \end{array}$$

方法二: $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x^2+4x+1)$

$$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+1)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +1 \end{array}$$

(2) $x^2+\frac{10}{3}x+1=\frac{1}{3}(3x^2+10x+3)$

$$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+3)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +3 \end{array}$$

在範例 2 第(1)題中，$(x+1)(x+\frac{1}{3})$ 和 $\frac{1}{3}(3x+1)(x+1)$ 都是 $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ 的因式分解。事實上，在範例 2 第(2)題中，$\frac{1}{3}(3x+1)(x+3)$、$(x+\frac{1}{3})(x+3)$ 和 $(3x+1)(\frac{1}{3}x+1)$ 都是 $x^2+\frac{10}{3}x+1$ 的因式分解。換句話說，若多項式的係數有分數時，可將原多項式改寫成 $\frac{1}{d}(ax^2+bx+c)$ 的形式，其中 a、b、c、d 爲整數，再對 ax^2+bx+c 做因式分解。

【類題練習 2】因式分解下列多項式：

(1) $2x^2-\frac{5}{2}x-3$　　　　(2) $\frac{6}{5}x^2-\frac{13}{5}x-1$

【重點整理】

1. 我們可嘗試引用十字交乘

$$\begin{array}{ccccc} & a & & b & \\ ac & & \times & & bd \\ & c & & d & \\ \hline & & ad+bc & & \end{array}$$

來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列多項式：

① $x^2+14x+33$ ② $5x^2-5x-10$

③ $x^2+\frac{3}{2}x-10$ ④ $9x^2-35x-4$

⑤ $7a^2-14ab-105b^2$ ⑥ $2(x-y)^2+3(y-x)-5$

⑦ $x^2-(p-q)x-pq$ ⑧ $ax^2-(a-b)x-b$

進階題

2. 因式分解下列多項式：

① $4x^4-13x^2-12$ ② $(a+b)(a+b-4)-12$

③ $(x-4y)(x+4y)+6xy$ ④ $x^2-(a+\frac{1}{a})x+1$

⑤ $(x^2-x+1)^2-3(x^2-x)-7$ ⑥ $(x^2+3x+5)(x^2+3x+1)+3$

2-4 利用乘法公式做因式分解

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來作因式分解。

【完全平方公式】

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

【範例 1】利用完全平方公式，因式分解下列各式：

(1) $a^2 + 6a + 9$ (2) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(3) $(x+2y)^2 + 6(x+2y)(y-x) + 9(x-y)^2$

(4) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

【解】 (1) $a^2 + 6a + 9 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = (a+3)^2$

(2) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3y)^2$

$= (2x-3y)^2$

(3) $(x+2y)^2 + 6(x+2y)(y-x) + 9(x-y)^2$

$= (x+2y)^2 - 2\cdot(x+2y)\cdot[3(x-y)] + [3(x-y)]^2$

$= [(x+2y) - 3(x-y)]^2$

$= (-2x+5y)^2$ （或寫成 $(2x-5y)^2$ ）

(4) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

$= (a^2 - 2ab + b^2) + (2bc - 2ca) + c^2$

$= (a-b)^2 + 2c(b-a) + c^2$

$= (a-b)^2 - 2c(a-b) + c^2$

$= (a-b-c)^2$

【類題練習 1】利用完全平方公式，因式分解下列各式：

(1) $a^2+10a+25$ (2) $16x^2-40xy+25y^2$

(3) $(x+y)^2+10(x+y)(y-x)+25(x-y)^2$

(4) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$

【平方差公式】

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

【範例 2】利用平方差公式，因式分解下列各式：

(1) $x^2-(x+2y)^2$ (2) $9-(a+2)^2$ (3) $x^2-y^2+2yz-z^2$

【解】 (1) $x^2-(x+2y)^2=[x+(x+2y)][x-(x+2y)]$

$=(x+x+2y)(x-x-2y)$

$=(2x+2y)(-2y)$

$=2(x+y)(-2y)$

$=-4y(x+y)$

(2) $9-(a+2)^2=3^2-(a+2)^2$

$=[3+(a+2)][3-(a+2)]$

$=(3+a+2)(3-a-2)$

$=(a+5)(1-a)$

(3) $x^2-y^2+2yz-z^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-(y-z)^2$

$=[x+(y-z)][x-(y-z)]$

$=(x+y-z)(x-y+z)$

【類題練習 2】 利用平方公式，因式分解下列各式：

(1) a^4-2a^2+1　　(2) $(2x-1)^2+4(2x-1)+4$

(3) a^2-b^2+2b-1　　(4) x^4-y^4

【完全立方公式】

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

【範例 3】 利用完全立方公式，因式分解下列各式：

(1) x^3+3x^2+3x+1　　(2) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(3) $27-27x+9x^2-x^3$

【解】

(1) $x^3+3x^2+3x+1=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$
$=(x+1)^3$

(2) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot(2x)\cdot y^2+y^3$
$=(2x+y)^3$

(3) $27-27x+9x^2-x^3=3^3-3\cdot 3^2\cdot x+3\cdot 3\cdot x^2-x^3$
$=(3-x)^3$

【類題練習 3】 完全立方公式，因式分解下列各式：

(1) x^3-3x^2+3x-1　　(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(3) $27+27x+9x^2+x^3$　　(4) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

【立方差與立方和】

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

【範例 4】利用立方和或立方差公式，因式分解下列各式：

(1) x^3-1　(2) a^3+8b^3　(3) x^6-y^6

【解】 (1) $x^3-1=x^3-1^3$

$$=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)$$

(2) $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3$

$$=[a+(2b)][a^2-a\cdot(2b)+(2b)^2]$$
$$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$$

(3) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

【類題練習 4】利用立方和或立方差公式，因式分解下列各式：

(1) $x^3+\dfrac{1}{27}$　(2) $8a^3-125b^3$

(3) x^3+x^2-2　(4) a^6-64b^6

在範例 4 的第(3)題中，也可以將 x^6-y^6 寫成 $(x^2)^3-(y^2)^3$，因此得到：

$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$$
$$=(x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2]$$
$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$$

事實上，$x^4+x^2y^2+y^4$ 可以再分解，我們將在下一個單元裡，介紹它的分解方法。

【重點整理】

1. 我們可嘗試利用下列的乘法公式：

【完全平方公式】 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$；

【平方差公式】 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$；

【完全立方公式】 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$；

【立方和、差公式】 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$，

來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列各式：

① $x^2 + 14x + 49$　　② $3x^2 - 12x + 12$

③ $x^2 - 4x(b-a) + 4(a-b)^2$　　④ $2x^2 - 18$

⑤ $\dfrac{1}{4} - (3+a)^2$　　⑥ $a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4$

⑦ $2x^3 + 16y^3$　　⑧ $-8 + 125x^3$

進階題

2. 因式分解下列各式：

① $x^2 - y^2 + 6yz - 9z^2$　　② $(1-ab)^2 - (a-b)^2$

③ $(a^2-1)(b^2-1) - 4ab$　　④ $\dfrac{1}{4}a^2 - \dfrac{2}{3}a + \dfrac{4}{9}$

⑤ $x^3 + x^2 - 36$　　⑥ $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 3$

3. 已知$a+b=3$，$ab=2$，求下列各式的值：

① $a^2 + b^2$　　② $4a^2 - ab + 4b^2$　　③ $a^3 + b^3$

2-5 利用配方法作因式分解

利用完全平方公式或完全立方公式，再配合平方差公式或前面介紹的方法，可以處理一些特殊多項式的因式分解，這裡需要一些拆項(分項)或補項(加減項)的技巧，要多練習。

【完全平方公式】 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

【平方差公式】 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

【完全立方公式】 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

【立方和、差公式】 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

【範例 1】因式分解下列多項式：

(1) $x^2 + 4x - 5$　　(2) $3a^2 - 4a + 1$

(3) $a^4 + a^2 + 1$　　(4) $9x^4 + 5x^2 + 1$

【解】 (1) $x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 5$

$= (x+2)^2 - 9$

$= (x+2)^2 - 3^2$

$= (x+5)(x-1)$

(2) $3a^2 - 4a + 1 = (3a^2 + a^2) - a^2 - 4a + 1$

$= 4a^2 - 4a + 1 - a^2$

$= (2a-1)^2 - a^2$

$= (3a-1)(a-1)$

(3) $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + (a^2 + a^2) - a^2 + 1$

$= a^4 + 2a^2 + 1 - a^2$

$= (a^2+1)^2 - a^2$

$= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$

$= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

(4) $9x^4 + 5x^2 + 1 = 9x^4 + (5x^2 + x^2) - x^2 + 1$

$= 9x^4 + 6x^2 + 1 - x^2$

$= (3x^2+1)^2 - x^2$

$$=(3x^2+1+x)(3x^2+1-x)$$
$$=(3x^2+x+1)(3x^2-x+1)$$

事實上，在範例 1 的第(3)題中，所見到的

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$$

也是一個常見的乘法公式。

【類題練習 1】 因式分解下列各式：

(1) x^2+2x-3　　(2) $5a^2-12a+4$

(3) $a^4+a^2b^2+b^4$　　(4) $9x^4+11x^2+4$

【範例 2】因式分解下列多項式：

(1) x^3-y^3　　(2) x^4+4

【解】 (1) 雖然可以直接引用立方差公式來因式分解，我們也可以用補項的概念來因式分解 x^3-y^3。

$$x^3-y^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2y-3xy^2$$
$$=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=(x-y)[(x-y)^2+3xy]$$
$$=(x-y)(x^2-2xy+y^2+3xy)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

(2) 很顯然，x^4+4無法直接使用平方差公式來分解。所以，我們嘗試用補項的方法來克服困難。

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$$
$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

在國中時期，因為我們要求因式分解後的各個因式的係數皆為有理數，所以有些二次式無法分解。如果允許因式的係數可為任意實數，那麼我們就可以用配方法來分解它。

【範例 3】 因式分解 x^2+4x+1。

【解】

$$
\begin{aligned}
x^2+4x+1 &= x^2+4x+4-4+1 \\
&= (x+2)^2-3 \\
&= (x+2)^2-(\sqrt{3})^2 \\
&= (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

【類題練習 2】 利用配方法的技巧，來因式分解下列各式：

(1) x^2+8x+9　　(2) x^3+y^3　　(3) x^4+64

【重點整理】

1. 我們可以用拆項或補項的概念將多項式配成某些乘法公式的形式來做因式分解。
2. 在配方法中，常引用的乘法公式有：

【完全平方公式】 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

【平方差公式】 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

【完全立方公式】 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$；

【立方和、差公式】 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$。

【家庭作業】

基礎題

1. 利用配方法因式分解下列各式：

① x^2+6x+8　　② $25a^4+6a^2+1$

③ x^4+324　　④ $a^4-4a^2b+3b^2$

進階題

2. 因式分解下列各式：

① $x^2+10x+23$　　② $a^2-b^2-c^2+2bc+a+b-c$

③ $8a^3-1$　　④ $27x^3+8y^3$

3. 回答下列各題：

① 已知$a-b=5$，$b-c=3$，求$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值。

② 若$x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+38=(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2$，其中$a$、$b$、$c$爲整數，求$a$、$b$、$c$的值。

4. 回答下列各題：

① 因式分解$a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$。

② 設a、b爲兩正數，若$a^2-4b=b^2+4a$，求$a-b$的值。

③ 承②，求$a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$的值。