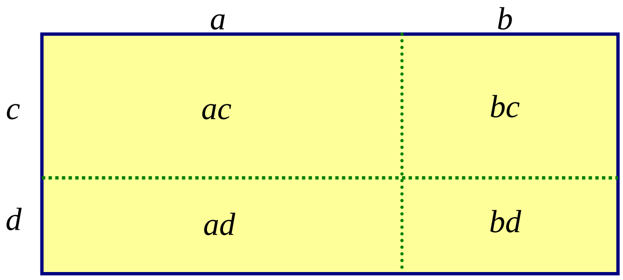
一、乘法公式與多項式

1-1 多項式的乘法

【二項式相乘公式】

如下圖，一個長為$a+b$，寬為$c+d$的長方形，其面積為$(a+b)(c+d)$，也等於四個長方形的面積和，即$ac+ad+bc+bd$ 。



我們也可利用分配律來展開$(a+b)(c+d)$的乘積而得到下列的公式：

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$ 【公式 1】

在應用上，a、b、c 及 d 可為數字或任何文字符號。

【範例 1】 利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(1+a)(1+b)$　　(2) $(x+2)(x+3)$　　(3) $(2x+y)(3x-y)$

【解】

(1) $(1+a)(1+b)=1\cdot 1+1\cdot b+a\cdot 1+a\cdot b$

$=1+a+b+ab$

(2) $(x+2)(x+3)=x\cdot x+x\cdot 3+2\cdot x+2\cdot 3$

$=x^2+5x+6$

(3) $(2x+y)(3x-y)=(2x+y)[3x+(-y)]$

$=2x\cdot 3x+2x\cdot(-y)+y\cdot 3x+y\cdot(-y)$

$=6x^2-2xy+3xy-y^2$

$=6x^2+xy-y^2$

在上例的第(2)題中，x^2+5x+6的x^2項(或稱**二次項**)係數為 1，x項(或稱**一次項**)係數為 5，常數項為 6，其中最高次項為二次，所以稱x^2+5x+6為x

的二次多項式，並簡稱爲**一元二次式**。在第(3)題中，$6x^2+xy-y^2$ 有x、y兩個變數，其中 $6x^2$、xy和$-y^2$都是二次項。因此，它的最高次項爲二次，所以稱它爲x和y的二次多項式，並簡稱爲**二元二次式**。

【類題練習 1】展開下列各式：

(1) $(5x+2)(2x-3)$　　(2) $(-2x+3y)(3x-4y)$

二項式相乘公式也常運用於來簡化數的計算過程，例如：

求 $123\times279+127\times121+123\times121+127\times279$ 的值。

我們觀察到 123×279 與 123×121 有公因數 123；127×121 與 127×279 有公因數 127，所以

$$
\begin{aligned}
&123\times279+127\times121+123\times121+127\times279\\
&=123\times279+123\times121+127\times279+127\times121\\
&=123\times(279+121)+127\times(279+121)\\
&=(279+121)\times(123+127)\\
&=400\times250\\
&=100000。
\end{aligned}
$$

【範例 2】展開下列各式：

(1) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

【解】　利用分配律：

(1) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$
\begin{aligned}
&=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1\\
&=x^6-1
\end{aligned}
$$

(2) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$
\begin{aligned}
&=x^5-x^4+x^3-x^2+x+x^4-x^3+x^2-x+1\\
&=x^5+1
\end{aligned}
$$

【範例 3】 分別求$(3x^2-5x+1)(-2x^3+4x^2-x+3)$的展開式中，$x^5$、$x^3$、$x^2$和$x$的係數。

【解】 利用分配律做展開運算時，只需要觀察兩式中，兩項次數的和等於所要求次數，則其係數乘積的總和即爲所求，因此

x^5的係數爲 $3\times(-2)=-6$；

x^3的係數爲 $3\times(-1)+(-5)\times4+1\times(-2)=-3-20-2=-25$；

x^2的係數爲 $3\times3+(-5)\times(-1)+1\times4=9+5+4=18$；

x的係數爲 $(-5)\times3+1\times(-1)=-15-1=-16$。

【類題練習 2】 分別求$(3x^4+x^3-2x^2-5x+1)(-2x^3+4x^2-x+3)$的展開式中，$x^7$、$x^6$、$x^4$、$x$的係數。

【重點整理】

1. 【二項式相乘公式】
   $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$，其中 a、b、c 及 d 可爲數字或任何文字符號。
2. 兩多項式相乘，若求部分項的係數時，只需將兩多項式中次數和相等的兩項係數相乘後，再求其和即可。

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

   ① $(1+2a)(2-3b)$　　② $(-x+5y)(2x-y)$

   ③ $(x-1)(x-2)(x-3)$　　④ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

2. 分別求$(x^5+2x^3-5x+1)(3x^5-x^4+2x^3-3x^2-7x+5)$的展開式中，$x^8$、$x^7$、$x^5$、$x^3$、$x$及常數項的係數。

進階題

3. 回答下列各題：

① 若$(x^3+ax+2)(2x-a)$的展開式中，x^3的係數爲 9，求 a 的值。

② 若$x(x+1)=3$，求$(x-1)^2(x+2)^2+3(x-3)(x+4)+5$的值。

③ 若 a、b、c 是整數，且$2x^2+3x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$，
求 a、b、c 的值。

4. 試證明下列兩式成立：

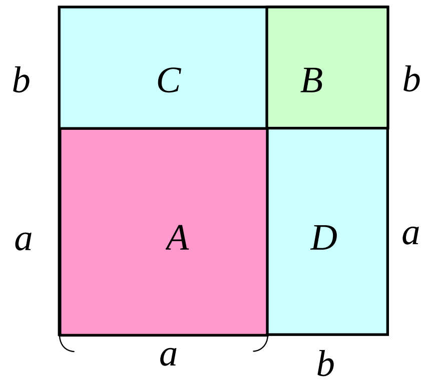
① $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)=x^n-1$

② $(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+x^2-x+1)=x^n+1$，其中 n 是奇數。

1-2 平方公式

多項式的乘法公式除了用來簡化多項式的乘法運算外，還可運用於因式分解。我們首先來複習已經學過的平方公式，然後再延伸到立方公式。

【完全平方公式】



我們觀察到上圖中，邊長為$(a+b)$的大正方形是由邊長分別為 a、b 的兩個正方形 A、B，和 C、D 兩個長方形所組合而成，其中 C 的面積為 ab、D 的面積為 ba，所以，大正方形的面積等於 A、B、C、D 四個區域的面積總和，也就是說

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+ab+ba \\ &= a^2+b^2+2ab \\ &= a^2+2ab+b^2\text{。}\end{aligned}$$

乘法交換律：
$ba=ab$

因此，我們得到**和的平方公式**：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \text{【公式 2】}$$

事實上，將公式 1 中的 c、d 分別以 a、b 代入，也可以得到

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b \\ &= a^2+2ab+b^2\text{。}\end{aligned}$$

【範例 1】 利用公式 2 展開下列各式：

(1) $(x+1)^2$　　(2) $(2x+3y)^2$

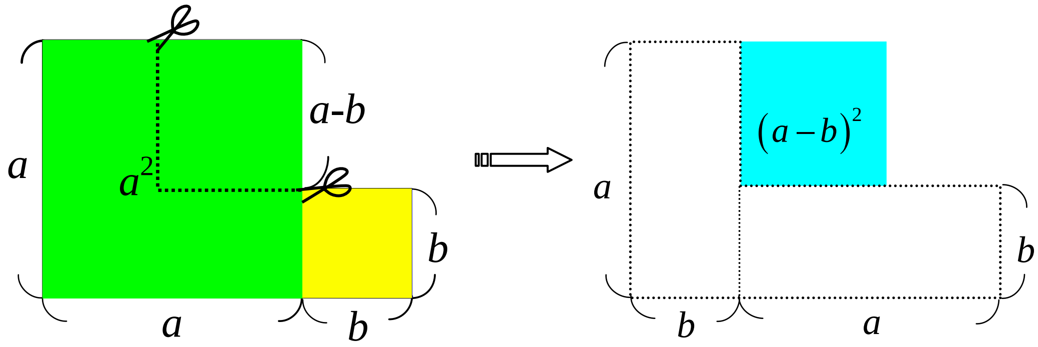
【解】 (1) $(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$

$$= x^2 + 2x + 1$$

(2) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3y)^2$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

有了和的平方公式，是否也有差的平方公式呢？如果在下面的左圖中，我們剪下一個邊長爲$a-b$的正方形，如下圖：



由上面各圖形之間面積的關係，我們知道$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 。

同樣的，若將公式 1 中的 b、c、d 分別以$-b$、a、$-b$ 代入，即可得

$$(a-b)(a-b) = a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 \text{，}$$

因而得到差的平方公式：

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{【公式 3】}$$

其實，只要將公式 2 中的 b 改爲$-b$，也可得到公式 3。

【範例 2】利用公式 3 展開下列各式：

(1) $(x-a)^2$　　　(2) $(2x-3y)^2$

【解】 (1) $(x-a)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot a + a^2$

$$= x^2 - 2ax + a^2$$

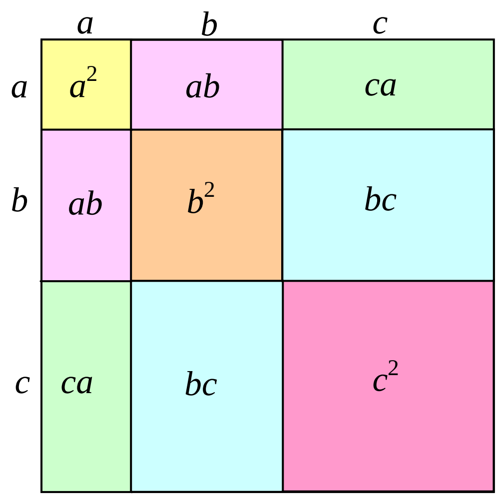
(2) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3y)^2$

$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

我們也常用和或差的平方公式來簡化數的計算，例如：在求 109^2時，可將 109 寫成 100＋9，再利用公式 2 即可求得：

$$\begin{aligned}109^2 = (100+9)^2 &= 100^2 + 2\times 100\times 9 + 9^2\\ &= 10000 + 1800 + 81\\ &= 11881\end{aligned}$$

接著來看三項和的平方公式。由下圖，



我們觀察到，邊長爲$(a+b+c)$的大正方形是由邊長分別爲 a、b、c 的三個正方形，和六個面積分別爲 ab、bc、ac 的長方形所組合而成，所以，大正方形的面積等於這九個區域的面積總和，也就是說

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

此外，我們知道 $a+b+c=(a+b)+c$，所以利用公式(2)即可得到：

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2\\ &= (a+b)^2 + 2\cdot(a+b)\cdot c + c^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\end{aligned}$$

因此，得到三項和的完全平方公式：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \qquad \text{【公式 4】}$$

【範例 3】 利用公式 4 展開下列各式：

(1) $(x+y+3)^2$　　　　(2) $(a+2b-3c)^2$

【解】 (1) $(x+y+3)^2 = x^2+y^2+3^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 3+2\cdot 3\cdot x$

$$= x^2+y^2+9+2xy+6y+6x$$

$$= x^2+2xy+y^2+6x+6y+9$$

(2) $(a+2b-3c)^2 = [a+(2b)+(-3c)]^2$

$$= a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2(2b)(-3c)+2(-3c)a$$

$$= a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$$

【類題練習 1】 試利用公式 4 展開下列各式：

(1) $(2x-y-3z)^2$　　　　(2) $(-3x+4y-5z)^2$

【平方差公式】

事實上，將公式 1 中的 c、d 分別以 a、$-b$ 取代，即可得：

$$(a+b)(a-b) = a\cdot a+\cancel{a\cdot(-b)}+\cancel{b\cdot a}+b\cdot(-b)$$

$$= a^2-b^2$$

因而得到**平方差公式**：

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad \text{【公式 5】}$$

【範例 4】 利用公式 5 展開下列各式：

(1) $(3x+4y)(3x-4y)$　　　　(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

【解】 (1) $(3x+4y)(3x-4y) = (3x)^2-(4y)^2$

$$= 9x^2-16y^2$$

(2) 由 $a+b-c=a+(b-c)$ 和 $a-b+c=a-(b-c)$，可以得到：

$$(a+b-c)(a-b+c) = [a+(b-c)][a-(b-c)]$$

$$= a^2-(b-c)^2$$

$$= a^2-(b^2-2bc+c^2)$$

$$= a^2-b^2+2bc-c^2$$

如同完全平方公式，我們也常利用平方差公式來簡化數的計算。例如：求788^2-212^2的值時，我們可得到下列算式：

$$\begin{aligned}788^2-212^2&=(788+212)(788-212)\\&=1000\times576\\&=576000\end{aligned}$$

又如求 107×93 的值時，我們觀察到 $107=100+7$、$93=100-7$，所以可得到下列算式：

$$\begin{aligned}107\times93&=(100+7)(100-7)\\&=100^2-7^2\\&=10000-49=9951\end{aligned}$$

【類題練習 2】求下列各式的展開式：

(1) $(x+3y+1)(x-3y-1)$　　(2) $(x+y)^2(x-y)^2$

【重點整理】

1. 常用的平方公式有:

【乘法分配律】　$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

【和的平方公式】　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

【差的平方公式】　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

【平方差公式】　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2. 做乘法運算時，有時候可以用平方公式來簡化運算過程。

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

① $(4x+3)^2$ ② $(-5x+2y)^2$

③ $(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b)^2$ ④ $(x+3y+5)^2$

⑤ $(2x-y-3)^2$ ⑥ $(\frac{2}{5}x-3y)(\frac{2}{5}x+3y)$

⑦ $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ ⑧ $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

2. 回答下列各題：

① 求$\frac{176^2}{138^2-38^2}$。 ② 求$(19\frac{19}{20})\times(20\frac{1}{20})$。

③ 求$2001\times2003-1998\times2006$。

④ 已知$(6825.5)^2=6825^2+x$，求 x 的值。

進階題

3. 展開下列各式：

① $(2a+3)^2(2a-3)^2$ ② $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

③ $(a-b-c)(a+b+c)$ ④ $(a+2)^4$

4. 回答下列各題：

① 求$1994\times2006-1999^2$的值。

② 求$\frac{285^2-115^2}{285^2+230\times285+115^2}$的值。

5. 回答下列各題：

① 利用乘法公式展開$(x+\frac{1}{x})^2$。

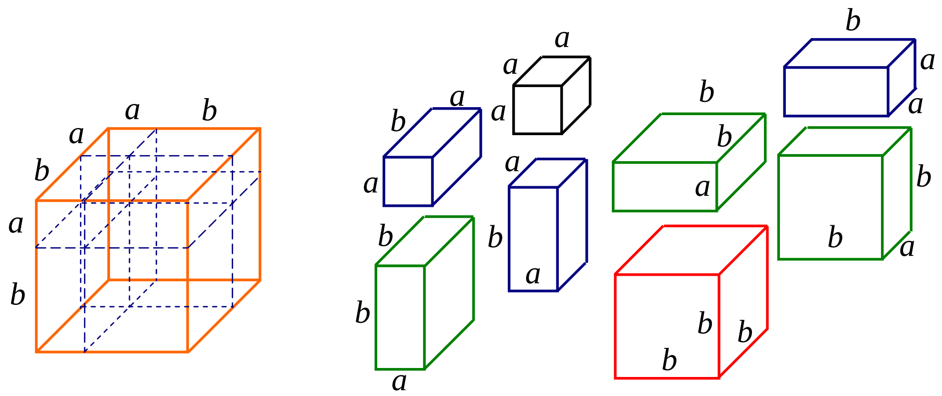
② 若$x+\frac{1}{x}=3$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值。

1-3 立方公式

在國中時期，同學們較少接觸到立方的乘法運算，事實上，在多項式的乘法和因式分解的過程中，立方公式也經常被引用。

【完全立方公式】

如下圖，一個邊長爲$(a+b)$的正立方體可切割成 2 個邊長分別爲 a、b 的正立方體，3 個體積爲a^2b的長方體和 3 個體積爲ab^2的長方體，即$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 。



至於$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$圖形的切割，請同學自行試驗。

事實上，展開$(a+b)^3$時，可先將$(a+b)^3$寫成$(a+b)(a+b)^2$ ，再利用二項和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

由此，我們可得到**和的完全立方公式**：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{【公式 6】}$$

同樣的，展開 $(a-b)^3$ 的乘積，並經化簡後即可得到**差的完全立方公式**：

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad \text{【公式 7】}$$

其實，只要將公式 6 中的 b 以 $-b$ 代入，同樣可得公式 7。

【範例 1】 展開下列各式：

(1) $(x+2)^3$ (2) $(3x+2y)^3$ (3) $(4a-5b)^3$

【解】 (1) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2) $(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$

$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

(3) $(4a-5b)^3 = (4a)^3 - 3(4a)^2(5b) + 3(4a)(5b)^2 - (5b)^3$

$= 64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$

【類題練習 1】 展開下列各式：

(1) $(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y)^3$ (2) $(4a^2 - \frac{5}{2}b)^3$

【立方和與立方差】

我們可利用分配律來展開 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 即可得到：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

因此，得到**立方和公式**：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \qquad \text{【公式 8】}$$

【範例 2】 利用公式 8 展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

【解】 (1) 由 $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$，與公式 8 比較可知，以 x 取代 a，以 2 取代 b，可得

$$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3$$
$$=x^3+8 \text{。}$$

(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

$$=(2a+5b)[(2a)^2-(2a)(5b)+(5b)^2]$$
$$=(2a)^3+(5b)^3$$
$$=8a^3+125b^3$$

同樣的，我們可以展開 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 並經合併化簡後，而得到立方差公式：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad \text{【公式 9】}$$

其實，只要把公式 8 中的 b 以 $-b$ 代入，即可得公式 9。

【範例 3】 利用公式 9 展開下列各式：

(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$　　(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})$

【解】 (1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)[(2x)^2+(2x)\cdot 1+1^2]$

$$=(2x)^3-1^3$$
$$=8x^3-1$$

(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})=(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})[(\frac{a}{3})^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2]$

$$=(\frac{a}{3})^3-(\frac{b}{2})^3$$
$$=\frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}$$

【類題練習 2】 (1) 試展開 $(5a-\frac{b}{2})(25a^2+\frac{5ab}{2}+\frac{b^2}{4})$。

(2) 試展開 $(x-3y)(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x^2+3xy+9y^2)$。

(3) 已知 $x^3=2$，求 $(x-3)(x^2+3x+9)$ 的值。

【重點整理】

1. 常用的立方公式有:

【和的立方公式】 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

【差的立方公式】 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

【立方和公式】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

【立方差公式】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

① $(-x-2)^3$ ② $(2a-3b)^3$

③ $(\frac{x}{3}+\frac{y}{2})(\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4})$ ④ $(2a-\frac{b}{2})(4a^2+ab+\frac{b^2}{4})$

⑤ $(a-3)(a+3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$

2. 利用乘法公式回答下列各題：

① 已知$x^3=2$，求$(x^2-1)(x^4+x^2+1)$的值。

② 求$(5\frac{1}{3})^3+(4\frac{2}{3})^3$。

進階題

3. 回答下列各題：

① 展開$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$。

② 設$a^3=8$，求$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$的值。

③ 設$a^2=5$，求$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$的值。

4. 回答下列各題：

① 已知 $a+b=3$ 且 $ab=2$，求(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3的值。

② 已知$a-b=-1$且$a^2+b^2=5$，求(1) ab (2) a^3-b^3的值。