

銜接教材的導讀

在國中的課程中，同學們學過「數與量」、「代數」、「圖形與空間」和「統計與機率」等主題的題材。進入高一之後，將要就「數與坐標系」、「數列與級數」、「多項式」、「指數與對數」、「三角函數的基本概念」和「三角函數的性質與應用」等六大主題做更深入的學習，而這些主題是需要用在國中階段的學習成果來做預備知識。由於暫行綱要能力指標和各版本課程設計的緣故，使得在銜接高中一年級數學課程中或許有不順暢之處。

我們以同學們的學習經驗及高中一年級課程的內涵為考量，來製作這本教材，希望能協助同學們順利銜接高中課程的學習。在教材中，「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」、「一元二次方程式」、「數列與級數」和「函數」等六個單元是高一上學期必要的預備知識。例如：高一第一章「數與坐標系」，就需要用同學們在國中所學的平方根、一元二次方程式解的判別式、二元一次方程式等來做預備知識。至於在附錄中的「立方根與高次方根」、「一元二次方程式的根與係數關係」、「不等式與集合」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」等五個單元，則是延伸性的知識。我們鼓勵同學們能自我學習，這將會更有助於高中數學的學習。

進入銜接單元之前，我們先用以下幾個主題來介紹高中課程常用的數學概念或名詞，以及銜接教材和高中課程間的關聯。

【數系的擴展】

在國中的課程裡，數的學習是由正整數、正分數、正小數和零，擴展至負整數、負分數和負小數。在數學上，凡是能寫成兩個整數相除的數稱為「有理數」(Rational Number)，其中除數不為零。同學們所學過的整數、分數和有限小數當然都是有理數。

此外，在小數中，可分為有限小數和無限小數，而且無限小數又分成循環的無限小數（簡稱循環小數），如： $0.3333\dots$ （記作 $0.\overline{3}$ ）、 $1.2525\dots$ （記作 $1.\overline{25}$ ）、 \dots 等，和不循環的無限小數兩種類型。

在高中課程的「等比級數」單元中，會藉由無窮等比級數來說明循環小數也可用分數來表示，例如： $0.3333\dots = 0.\bar{3} = \frac{1}{3}$ ， $-1.111\dots = -1.\bar{1} = -\frac{10}{9}$ 。因此，循環小數也是有理數。

那麼，不循環的無限小數應歸在數系裡的那一類呢？在數學裡，將不為有理數的數統稱為「**無理數**」(Irrational Number)。也就是說，不循環的無限小數就是無理數。在高一上學期第一章中，同學們將要學習如何證明 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 等平方根為無理數。此外，圓周率 $\pi = 3.14159\dots$ 也是無理數。

再者，在數學上，將有理數和無理數統稱為「**實數**」(Real Number)，並常以英文大寫字母「**R**」來代表實數，「**Q**」代表有理數，「**Z**」代表整數，而以「**N**」代表正整數(或稱自然數)。

在銜接教材中，我們會使用整數、分數、有理數和實數這些名詞來描述數的屬性，以協助同學們提早適應。此外，我們會用「**非負數**」來表示大於零，或等於零的數；同樣的，用「**非正數**」來表示小於零，或等於零的數。

除了實數，高中的課程再將數系的學習擴展到「**複數**」(Complex Number)。在數學上，以 $a + bi$ (a 、 b 皆為實數) 來表示複數，其中 $i^2 = -1$ 。由於複數的引進，使得國中階段所討論的一元二次方程式都會有解。也就是說，以前我們說某些一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 在判別式 $b^2 - 4ac < 0$ 時，沒有解，應該是說此方程式沒有實數解。例如：方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ 的判別式 $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$ ，而它確實有兩個複數解 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 。

【乘法公式與因式分解】

同學們在國中所學的乘法公式與因式分解都是建構在二項式乘積、完全平方及平方差公式，所以多項式的主題僅侷限於一次、二次多項式。由於缺乏立方公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 ;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) ,$$

的學習，在國中課本中很少出現三次以上的多項式。國中老師或許會補充，但一般來說，同學們對 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 、 $x^3 + 1$ 、 $x^4 - 1$ 等常見的高次多項式就較為陌生。然而在高中課程之中，將會經常使用到三次以上多項式的乘、除運算、因式分解、求根等，因此，同學們要加強三次以上多項式間的加、減、乘、除四則運算的熟練度。

【平方根與高次方根】

對同學們而言，平方根的符號最常出現在一元二次方程式的公式解，或利用畢氏定理(即商高定理)求直角形的某一邊長等問題之中，而且很少有對方根繼續做運算的必要。在高中的課程裡，卻是經常用到方根的加、減和乘法的運算，或者在運算過程中需對含有根號的算式做化簡。同學們也應加強根式運算、化簡以及有理化的熟練度，因為這些概念不只是高一上學期第一章「數與坐標系」的預備知識，也是複數的基本運算模式。

在高中的課程裡，方根的學習也將由平方根擴展到立方根 $\sqrt[3]{a}$ 或 $a^{1/3}$ ，乃至於 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{1/n}$ ，所以可將指數律的指數由國中階段所學的整數擴展至任意的有理數

$$a^p a^q = a^{p+q} ; a^p b^p = (ab)^p .$$

因此，我們在附錄 A1 說明立方根、 n 次方根的概念，同學們可以自行參考，來充實高一下學期第一章「指數與對數」的基礎知識。

【推理過程與符號的使用】

數學是一個深具知識結構的科學，在推論的過程中講求「有因方有果」的邏輯。也就是說，我們會在給定的條件下，嘗試去做分析與推論。例如，若 $x > 1$ ，則 $x^2 > 1$ 。這樣的推論，也常用「**假設(已知、如果或因為)** $x > 1$ ，**所以(或因此)** $x^2 > 1$ 」等形式來表徵。

有時候，我們會用一些符號來簡化這些推論的表徵。例如，以「 \therefore 」

代表「若」、「假設」、「已知」、「如果」或「因為」，並以「 \therefore 」代表「所以」或「因此」。以「因為 $x > 1$ ，所以 $x^2 > 1$ 」為例來做說明，我們也可以用「 $\therefore x > 1, \therefore x^2 > 1$ 」來表徵。

事實上，「因為 $x > 1$ ，所以 $x^2 > 1$ 」應有以下推論過程：

由 $x > 1$ ，若對 $x > 1$ 兩邊同乘以 x ，可得 $x^2 > x$ 。

因此，由遞移律，可得 $x^2 > x > 1$ 。

我們常用箭頭符號「 \Rightarrow 」來表徵「由左向右」或「由上向下」推論的順序。因此，上述的推論過程可寫成：

$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$ $\Rightarrow x^2 > 1$	或	$\therefore x > 1 > 0$ $\therefore x^2 > x$ $\Rightarrow x^2 > 1$
---	---	---

在代數式的推論過程，我們也常用這樣的寫法。例如：解 $2x^2 + 5x + 2 = 0$ 時，可以用下列的方式來解題：

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2 + 5x + 2 &= (2x+1)(x+2) = 0 \\ \Rightarrow 2x+1 &= 0, \text{ 或 } x+2 = 0 \\ \Rightarrow x &= -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x = -2 \end{aligned}$$

因此，在本教材中的某些範例中，我們會在推論的過程中使用這些符號的表徵。

我們將教材中的「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」及「一元二次方程式」等單元列為預備階段，希望進入高一上學期的第一章「數與坐標系」之前，同學們能強化這四個單元的基礎知識，而融入階段的「數列與級數」和「函數」二個單元，乃至於附錄 A3 的「不等式與集合」，則做為第二章「數列與級數」和第三章「多項式」的基礎知識。

在高中的課程中，平面幾何的基本性質，例如：三角形的內角和、外角和、邊角關係、全等、相似以及三心等性質；平行線的相關性質；圓的

圓心角、圓周角、切線、三角形的內切圓、外接圓等性質，都被視為基礎知識，我們在附錄 A4 中列出重要的幾何性質，做為同學們複習的參考，並為高一下三角函數的學習預做準備。

「多項式函數」、「指數與對數函數」、「三角函數」是高中數學課程中有關函數的三個重要主題，其中三角函數的學習則是建構在國中階段所學的比例與比值、直角三角形、相似三角形、圓心角、圓周角及切線等重要性質。我們建議同學們除了複習 A4 的內容外，也能利用寒假先閱讀附錄 A5-1 的內容而對銳角三角函數有初步的認識，這絕對有助於高一下第二章的學習。我們更鼓勵同學們勇於挑戰 A5-2、A5-3，進一步充實三角函數的基礎知識。

這份教材除了提供給高中做為銜接教學的參考依據之外，我們希望同學們也能自我學習。因此，在每一個單元中，我們會複習或說明國中階段的學習經驗，再進入銜接的主要內容；除了重要類型的範例之外，並且設有「類題練習」來引導同學再次理解相關範例的概念。在某些單元的家庭作業中，除了基礎的練習題之外，我們也希望同學勇於向進階題挑戰。本教材附有各單元類題練習、想想看及家庭作業的簡答，同學們若需要較詳細的解題過程，可自教育部中教司網站：

[http://www.edu.tw/EDU WEB/Web/HIGH-SCHOOL/index.htm](http://www.edu.tw/EDU_WEB/Web/HIGH-SCHOOL/index.htm)

或國立中正大學數學系網站：

<http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/index.htm>

中下載。