建中數學科教師研習 92.01.17/92.01.20

GSP 動態幾何軟體在數學教學上的應用

國立台灣師範大學數學系　陳創義
我的網頁：http://math.ntnu.edu.tw/~cyc/
我的 E-MAIL：cyc@math.ntnu.edu.tw

預備知識：熟悉 GSP 的基本操作與功能

進階研習大綱

1. GSP4.0 與 GSP3.0 的差異
2. 函數圖形繪製的基本想法與教學應用(以三角函數、多項式函數為例)(下載我網頁的畫函數圖形 gsp4.0 版檔案)
3. 圓錐曲線繪製的基本想法與教學應用(參閱我網頁的講義)
   （1）透過與兩點距離和差為定值的定義繪製橢圓雙曲線, 以及切線的探討及延伸其它繪圖的技巧
   （2）從焦點與準線繪製拋物線以及切線的探討
   （3）從長軸短軸繪製橢圓以及變形圖繪製
   （4）過五點的圓錐曲線繪製及想法

[探討問題 1：圓錐曲線的切線有什麼性質？為什麼？
探討問題 2：過橢圓外一點作橢圓的切線？
探討問題 3：給定圓錐曲線如何尺規作圖找出它們的焦點？]

4. 提問：如何在 GSP 上做出直線與圓錐曲線的交點？
   (提示：過兩點且與一直線(或圓)相切的圓心的尺規作圖)
5. 立體圖形繪製的想法與教學應用
   (下載我網頁的三維立體坐標架 gsp4.0 版檔案)
   (1) 多面體的繪製
   (2) 多面體的上色
   (3) 多面體的展合
   (4) 平面與圓錐的截痕
6. 其它

附件

GSP4 中英對照

陳創義

File(檔案)

New Sketch(開新檔案)
Open…(開啟舊檔)
Save(儲存檔案)
Save As(另存新檔)
Close(關閉檔案)
DocumentOptions…(文件選項)
Page Setup…(版面設定)
Print Preview...(列印預覽)
Print(列印)
Exit(結束離開)

Edit(編輯)

Undo(還原)
Redo(重作)
Cut(剪下)
Copy(複製)
Paste(貼上)
Clear(刪除)
Action Button(建立按鈕)

> Hide/Show(隱藏/顯示)
> Animation…（動態）
> Movement…（移動）
> Presentation…（上演）
> Link…（連結）
> Scroll…(捲動)

Select All (全選)
Select Parents(選父輩)
Select Children(選子輩)
Split/Merge(分離/合併)
Edit Definition…(編輯定義)
Properties…(性質)
Preferences…(組態)
Links... 連結
Insert Object 插入物件

Display(展示)

LineWidth(線條寬度)

> Dashed(虛線)
> Thin(細線)
> Thick(粗線)

Color(顏色)
Text (文字)
HideObjects(隱藏物件)
ShowAllHidden(顯示全部隱藏)
Show Labels (顯示標示)
Trace(痕跡選定)
EraseTrace(擦掉痕跡)
Animate...(動態模擬)
IncreaseSpeed(加快速率)
DecreaseSpeed(減慢速率)
StopAnimation(停止動態)
ShowTextPalette(顯示文字面版)
ShowMotionController(顯示運動控制器)
Hide Toolbox 隱藏工具盒

Construct(構圖)

Point On Object(物件上的點)
Midpoint(中點)
Intersection(交點)
Segment(線段)
Ray (射線)
Line(直線)
Parallel Line(平行線)
Perpendicular Line(垂線)
Angle Bisector(角平分線)
Circle By Center+Point(以圓心及點造圓)
CircleByCenter+Radius(以圓心及半徑造圓)
Arc On Circle(圓上的弧)
Arc Through 3 Points(過三點弧)
Interior(內部)
Locus(軌跡)

Transform(變換)	**Measure(度量)**
Mark Center(標定中心) Mark Mirror(標定鏡射軸) Mark Angle(標定角度) Mark Ratio(標定比值) Mark Vector(標定向量) Mark Distace(標定距離) Translate... (平移) Rotate...(旋轉) Dilate...(伸縮) Reflect(鏡射) Iterate...(迭代)	Length(長度) Distance(距離) Perimeter(周長) Circumference(圓周長) Angle(角度) Area(面積) Arc Angle(弧度) Arc Length(弧長) Radius(半徑) Ratio(比值) Calculate...(計算…) Coordinates(坐標) Abscissa(x)(x 坐標) Ordinate(y)(y 坐標) CoordinateDistance(相對於坐標系的距離) Slope(斜率) Equation(方程式)
Graph(圖形) DefineCoordinateSystem(定義坐標系) Mark CoordinateSystem(標定坐標系) Grid Form...(格點型式) Show Grid(顯示格點) Snap Points(就近點或格子點) Plot Points…(描點) New Parameter…(新參數) New Function…(新函數) Plot New Function…(描繪新函數) Derivative(導數) Tabulate(表格) Add Table Data…(加入表格資料) Remove Table Data…(移去表格資料)	**Help(說明)** Contents(內容) What'sNew(新版訊息) Elements(元件) Menus(選單) Toolbox(工具盒) Keyboard(鍵盤) Advanced Topics(進階主題) AboutSketchpad(關於繪圖版) PolarGrid(極坐標格點) SquareGrid(方格點) RectangularGrid(長方格點)

第三章　圓錐曲線

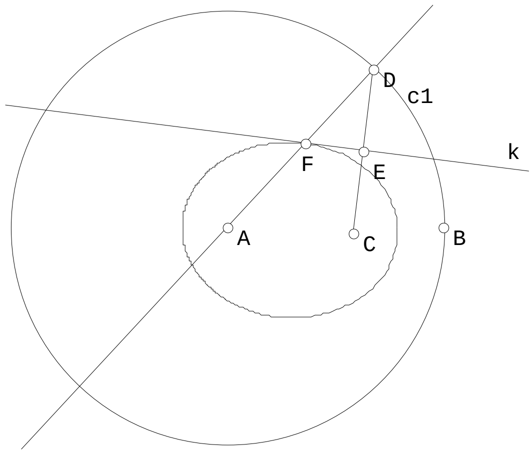
第一部分　圓錐曲線的繪製

利用 GSP 來畫圓錐曲線的方法很多，我們介紹幾種較一般的做法：

第一節　以兩焦點及距離的和差畫橢圓及雙曲線

這是利用橢圓的基本定義：「在平面上給兩定點，與這兩點的距離和為定值的點所成的圖形稱為橢圓。」及雙曲線的基本定義：「在平面上給兩定點，與這兩點的距離差的絕對值為定值的點所成的圖形稱為雙曲線。」來設計。這兩種圖形可在同一個作法裡作出，只要調整點的位置即可展現不同的圖形。作法如下：

1. 以點 A 為圓心，過點 B 畫圓，產生圓 c1；
2. 在圓 c1 上任取一動點 D；
3. 用線段連接點 C 及點 D，產生線段 CD；
4. 選取線段 CD，在 Construct 按 Point At Midpoint，產生中點 E；
5. 選取點 E 及線段 CD，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生線段 CD 的中垂線 k；
6. 用直線連接點 A 及點 D，產生直線 AD；
7. 選取直線 AD 及中垂線 k，在 Construct 按 Point At Intersection(或直接用滑鼠箭頭對準指向該點按左鍵一下)，產生交點 F；
8. 選取點 F、點 D，在 Construct 按 Locus，產生點 F 的軌跡。(如下圖)
9. 調整點 A,點 B,點 C 的位置可得到你想要的圖形，並把不想出現的東西選取出來(按快速鍵 Ctrl+H)隱藏起來，選工具盒的手指頭，指向點(或線、或圓)可把點(或線、或圓)的標籤隱藏。



※當點 C 在圓 c1 內，有 AF+FC=AB，即點 F 的軌跡是以點 A 及點 C 為焦點，AB 為距離和的橢圓；當點 C 在圓 c1 外，|AF-FC|=AB，所以點 F 的軌跡是以點 A 及點 C 為焦點，AB 為距離差的雙曲線。

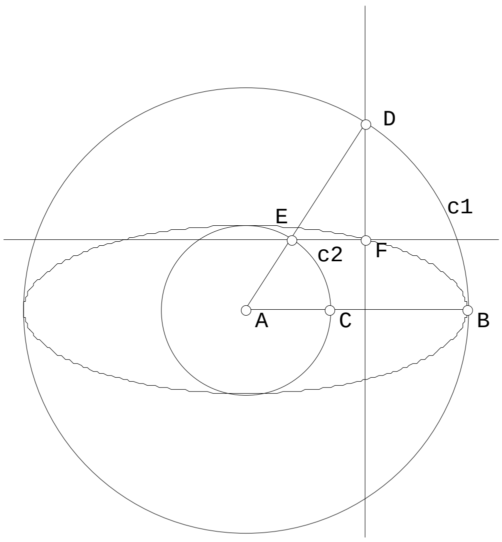
※中垂線 k 是橢圓(或雙曲線)在點 F 的切線，利用這個性質，可畫過線外一點與橢圓(或雙曲線)的切線，這對畫立體圓錐時很重要。

練習：製作橢圓或雙曲線的兩條相互垂直的切線，觀察其交點的軌跡。

第二節　以長短軸半徑來畫橢圓

這是利用橢圓的參數式 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$，其中 a 為長軸半徑、b 為短軸半徑，注意角度θ的幾何意義，這是很容易被誤認的(會被圓的情形誤導)。作法如下：

1. 以點 A 為圓心，過點 B 畫圓，產生圓 c1；
2. 用線段連接點 A 及點 B，產生線段 AB(線段 AB 長度為長軸半徑長)；
3. 在線段 AB 上任取一動點 C(點 A 與點 C 的距離為短軸半徑長)，以點 A 為圓心，過點 C 畫圓，產生圓 c2；
4. 在圓 c1 上任取一動點 D，用線段連接點 A 及點 D，產生線段 AD；
5. 線段 AD 與圓 c2 相交，產生交點 E；
6. 選取點 D 及線段 AB，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生過點 D 與線段 AB 相垂直的直線 k；
7. 選取點 E 及線段 AB，在 Construct 按 Parallel Line，產生過點 E 與線段 AB 相平行的直線 l；
8. 直線 k 與直線 l 相交，產生交點 F；
9. 選取點 F 及點 D，在 Construct 按 Locus，產生點 F 的軌跡。(如下圖)
10. 接著你可調整 A,B,C 的位置(註：調整 B 的位置可改變橢圓的傾斜度及長軸半徑)，把不想出現的東西選取隱藏起來，得到你想要的圖形。



※長軸、短軸的半徑長分別為 AB、AC，$\theta=\angle BAD$，點 D 沿著圓 c1 在變動，所以θ在變，利用橢圓的參數式 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$，其中 a=AB, b=AC。

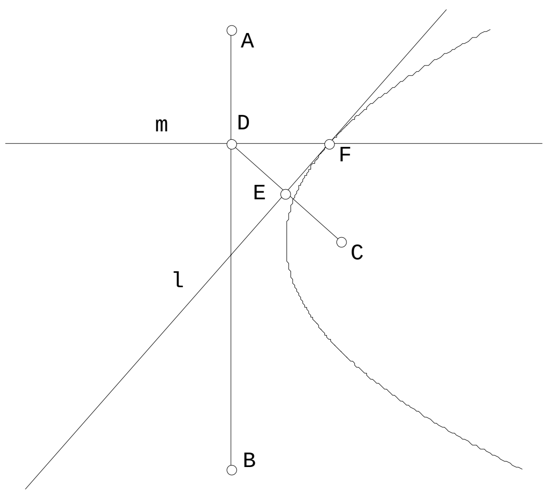
※畫立體坐標或立體圖形常用到它。

練習：利用雙曲線的參數式 $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$ 來畫雙曲線。

第三節　以準線及焦點畫拋物線

拋物線的定義：「在平面上，與一固定直線及線外一定點等距離的所有點所成的圖形，稱為拋物線。此定點稱為拋物線的焦點，固定直線稱為拋物線的準線。」我們利用這定義來畫拋物線，作法如下：

1. 畫直線 AB 及直線 AB 外取一點 C；
2. 在直線 AB 上任取一動點 D，用線段連接點 C 及點 D，產生線段 CD；
3. 選取線段 CD，在 Construct 按 Point At Midpoint，產生中點 E；
4. 選取點 E 及線段 CD，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生線段 CD 的中垂線 k；
5. 選取直線 AB 及點 D，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生過 D 與線段 AB 相垂直的直線 l；
6. 選取直線 l 及中垂線 k，在 Construct 按 Point At Intersection(或直接用滑鼠箭頭對準指向該點按左鍵一下)，產生交點 F；
7. 選取點 F 及點 D，在 Construct 按 Locus，產生點 F 的拋物線軌跡(如下圖)；
8. 接著你就調整 A,B,C 的位置(註：調整 B 的位置可改變拋物線的傾斜度)並把不想出現的東西選取出來隱藏，得到你想要的圖形。



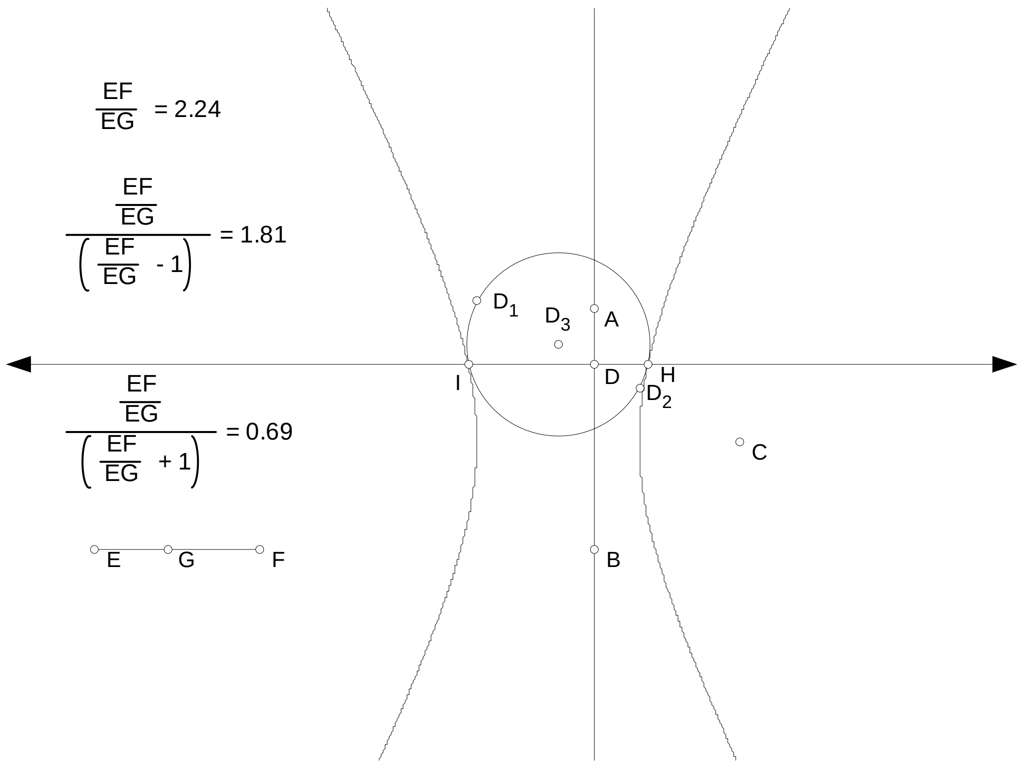
※因為 DF=CF，即 F 與直線 AB 的距離等於點 F 與點 C 的距離，所以點 F 的軌跡為拋物線，其中點 C 及直線 AB 分別為拋物線的焦點及準線。

※直線 l 為拋物線在點 F 的切線。

第四節　以焦點與準線畫雙曲線

給定一點及不過此點的直線，如果與它們之間的距離比為定值 e 的所有點所成的圖形，當 0<e<1 時，圖形為橢圓；當 e=1 時，圖形為拋物線；當 e>1 時，圖形為雙曲線。下面雙曲線的作法，就是利用這性質來做的，在此我們還用到一個性質就是：「在平面上，與兩定點的距離比 r(定值且≠1)的所有點所成圖形為一個圓且圓心在它們的連線上。」作法如下：

1. 畫直線 AB(準線)，並給定線外一點 C(焦點)；
2. 在直線 AB 上任取一動點 D，選取點 D 及直線 AB，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生過點 D 的垂線 k；
3. 在另外畫一線段 EF，並在線段 EF 上取一點 G；
4. 依序選取三點 E、G、F，(左手仍按住鍵盤上的 Shift 鍵不放)在 Measure 按 Ratio，產生 EF/EG 的比值[m1](當作與焦點及準線的比值)；
5. 在 Measure 按 Calculate，計算[m1]/([m1]-1)，產生[m2]；
6. 在 Measure 按 Calculate，計算[m1]/([m1]+1)，產生[m3]；
7. 標定中心點 C，選取點 D，在 Transform 按 Dilate，以點 C 為伸縮中心，以[m2]為伸縮比例，將點 D 作伸縮變換，產生點 D_1；
8. 再選取點 D，在 Transform 按 Dilate，以點 C 為伸縮中心，以[m3]為伸縮比例，將點 D 作伸縮變換，產生點 D_2；
9. 標定中心點 D_1，選取點 D_2，在 Transform 按 Dilate，以點 D_1 為伸縮中心，以 0.5 為伸縮比例，將點 D_2 作伸縮變換，產生 D_1D_2 的中點 D_3；
10. 以點 D_3 為圓心，過點 D_1 畫圓，產生圓 c1；
11. 圓 c1 與直線 k 相交，產生兩個交點 H 及 I；
12. 選取點 H 及點 D，在 Construct 按 Locus，產生點 H 的軌跡(雙曲線的一支)；
13. 選取點 I 及點 D，在 Construct 按 Locus，產生點 I 的軌跡(雙曲線的另一支)；(如下圖)；
14. 接著你就調整某些點的位置，並把不想出現的東西選取出來隱藏，得到你想要的圖形。



練習：利用此作法來產生橢圓，看看圖形效果如何？

第五節　以極坐標來作圓錐曲線

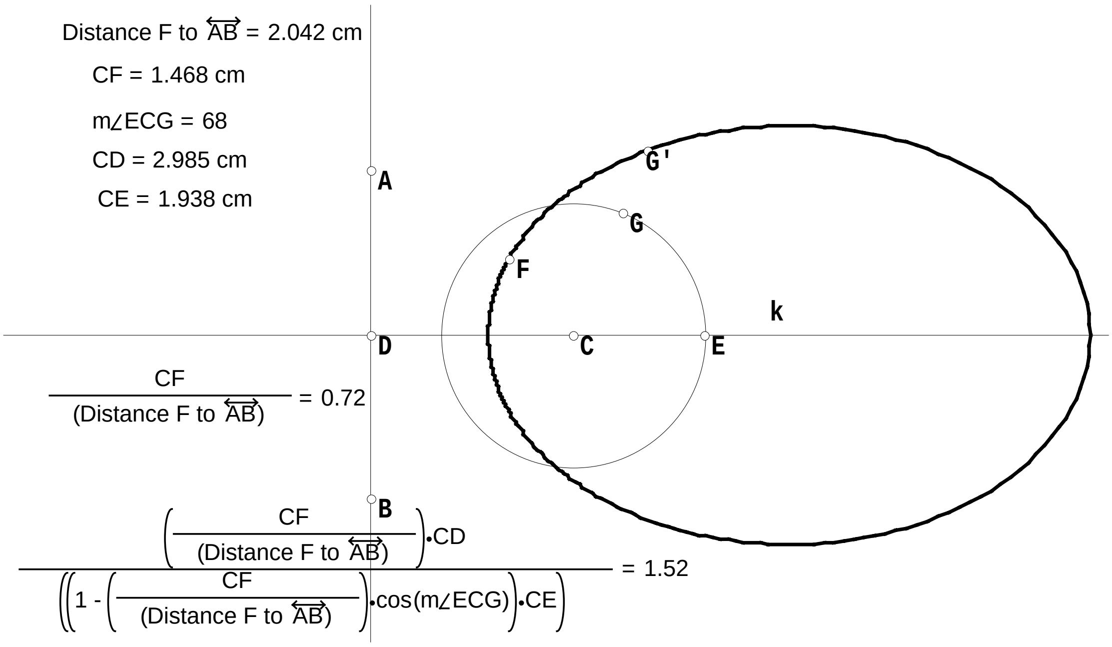
作法與焦點、準線類似，但同一作法涵蓋三種曲線。給定一準線及一焦點，以焦點為原點，以與準線垂直的直線為軸(其方向與它跟準線交點的不同側)，圓錐曲線的離心率 e 為圓錐曲線上的點到焦點的距離與到準線的距離比，其極坐標方程式為

$$r = \frac{e\,d}{1 - e\cos\theta},\qquad \text{其中 } d \text{ 為焦點與準線的距離.}$$

作法如下：

1. 畫直線 AB(當準線)，及線外取一點 C(當焦點)；
2. 選取點 C 及直線 AB，在 Construct 按 Perpendicular Line，產生過點 C 的垂線 k；
3. 直線 AB 與垂線 k 相交，產生交點 D；
4. 在直線 k 上任取一點 E，使點 C 介於點 D 與點 E 之間，並以 C 為圓心，過點 E 畫圓，產生圓 c1；
5. 在對直線 AB 與點 C 同側，取一點 F(圓錐曲線將通過點 F)；
6. 選取點 F 及直線 AB，在 Measure 按 Distance，產生點與直線 AB 的距離 [m1]；
7. 選取點 F 及點 C，在 Measure 按 Distance，產生點 F 與點 C 的距離[m2]；
8. 在圓 c1 上任取一動點 G，依序選取點 E、點 C、點 G，在 Measure 按 Angle，產生∠ECG 的有向角度[m3]；
9. 選取點 C 與點 D，在 Measure 按 Distance，產生點 C 與點 D 的距離[m4]；
10. 選取點 C 與點 E，在 Measure 按 Distance，產生點 C 與點 E 的距離[m5]；
11. 在 Measure 按 Calculate，計算[m2]/[m1]，產生離心率[m6]；
12. 在 Measure 按 Calculate，計算 [m6]*[m4]/((1-[m6]*cos([m3]))*[m5])，產生[m7]；
13. 標定中心點 C，選取點 G，在 Transform 按 Dilate，以點 C 為伸縮中心，以[m7]為伸縮比例，將點 G 作伸縮變換，產生點 G′；
14. 選取點 G′與點 G，在 Construct 按 Locus，產生點 G′的軌跡；
15. 接著你就調整某些點的位置，並把不想出現的東西選取出來隱藏，得到你想

要的圖形。



※調整點 F 的位置，改變離心率可得過點 F 的不同種類的圓錐曲線。

第六節　橢圓規的原理

橢圓規的原理，是一固定長度的線段，一端在坐標橫軸上移動，另一端在縱軸上移動，在這線段上取一點，將線段分成兩段，保持固定比例，所移動產生的軌跡是一個橢圓，算算看是否如此，這橢圓的長短軸半徑之和就是這線段的長度，長軸半徑、短軸半徑剛好是被分成的兩段。作法如下：

1.給定點 A，將點 A 沿 0 度方向平移 1cm，產生點 A′；

2.畫直線 AA′，並在直線 AA′上取一點 B；

3.以點 A 為圓心，通過點 B 畫圓 c1；(AB 為橢圓的長短軸半徑之和)

4.作過點 A 與直線 AA′垂直的直線 k；

5.在圓 c1 上取一動點 C；

6.將點 C 對直線 AA′及直線 k 作垂線，分別產生直線 k_1 及直線 k_2；

7.點出直線 AA′與直線 k_1 的交點 D 及直線 k 與直線 k_2 的交點 E；

8.畫線段 DE；

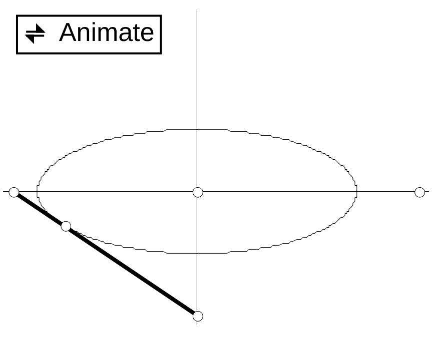
9.選取點 C 及圓 c1，在 Edit 按 Action Button 的 Animation 製作動態按鈕。

10.將點 A′、點 C、圓 c1、直線 k_1 及直線 k_2 隱藏；

11.在線段 DE 上取一點 F；(可調整使 DF 與 EF 分別為長短軸半徑)

12.選取點 F 及點 C 造軌跡；(或選取點 F，在 Display 按 Trace)

13.連按兩下 Animate，觀察點 F 的軌跡。



※如果選取線段 DE，軌跡樣本數取 40，線段 DE 的軌跡就是星形線。

※上面作法你也許會覺得真正做成實體，會有礙腳的地方，我們就把線段 DE 改成直線，把點 F 取在線段 DE 之外，點 D、E 所跑的範圍做成架子，就不會礙到點 F 的軌跡，此時軸半徑長就是點 F 與點 D、點 E 的距離。

※當然還有其他用連桿的方法，來造橢圓規，可試著想想看。

練習：當定長的線段兩端所在的兩相交直線，它不垂直時，作法如何？

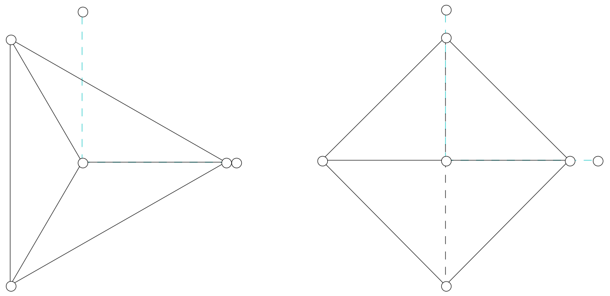
(提示：利用等腰梯形的對角線性質)

正多面體的頂點坐標

國立台灣師範大數學系　陳創義

要利用 GSP 來作多面體，先要從立體的基本正多面體下手，在正多面體中有許多的對稱，包括旋轉對稱、面對稱、線對稱、點對稱等，因此下列舉出旋轉對稱中的旋轉軸置於 z 軸時，某些較簡單形式的頂點坐標標出來，其中旋轉軸在四面體選取的有點到底面中心的連線及兩稜中點連線兩種，另外，正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體選取的有面中心到面中心的連線、稜中點到稜中點的連線、頂點到頂點的連線三種。若一線段長度為 a，正射影到 xy 平面的長度為 b，該線段正投影到 z 軸的長度為 c，利用畢氏定理知道它們的關係是 $a^2=b^2+c^2$。

正四面體頂點坐標



令$O=(0,0)$,　$R(O,\theta)(a,b)=(a\cos\theta-b\sin\theta, a\sin\theta+b\cos\theta)$ 表繞O旋轉θ角度.

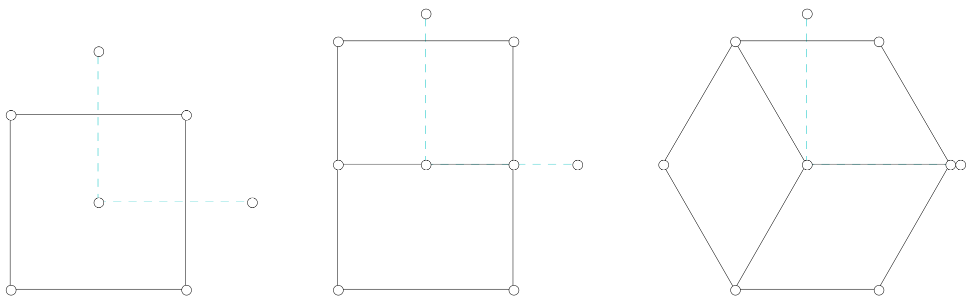
(一)

$$v1=(0,0,1); v2=(\frac{\sqrt{8}}{3},0,-\frac{1}{3}); v3=(R(O,120°)(\frac{\sqrt{8}}{3},0),-\frac{1}{3}); v4=(R(O,240°)(\frac{\sqrt{8}}{3},0),-\frac{1}{3}).$$

(二)

$$v1=(\sqrt{\frac{2}{3}},0,\sqrt{\frac{1}{3}}); v2=(-\sqrt{\frac{2}{3}},0,\sqrt{\frac{1}{3}}); v3=(0,\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}); v4=(0,-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}).$$

正六面體頂點坐標



(一)

$\vec{v}_1=(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}});\vec{v}_2=(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}});\vec{v}_3=(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}});\vec{v}_4=(\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}});$

$\vec{v}_5=-\vec{v}_1;\vec{v}_6=-\vec{v}_2;\vec{v}_7=-\vec{v}_3;\vec{v}_8=-\vec{v}_4.$

(二)

$\vec{v}_1=(\sqrt{\frac{1}{3}},0,\sqrt{\frac{2}{3}});\vec{v}_2=(-\sqrt{\frac{1}{3}},0,\sqrt{\frac{2}{3}});\vec{v}_3=(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},0);\vec{v}_4=(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},0);$

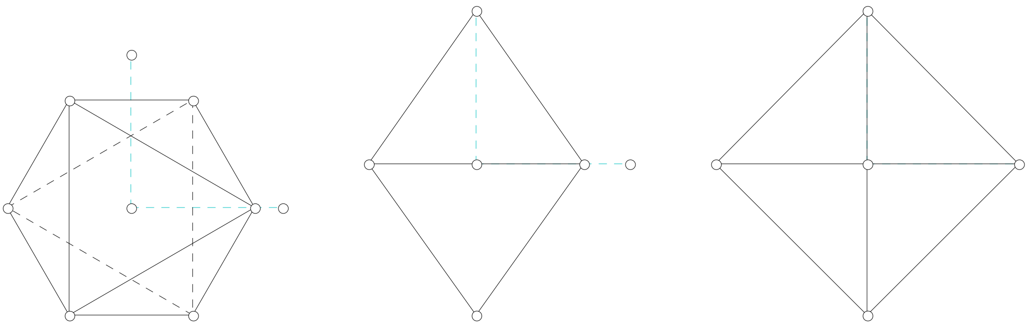
$\vec{v}_5=-\vec{v}_1;\vec{v}_6=-\vec{v}_2;\vec{v}_7=-\vec{v}_3;\vec{v}_8=-\vec{v}_4.$

(三)

$\vec{v}_1=(0,0,1);\vec{v}_2=(\frac{\sqrt{8}}{3},0,\frac{1}{3});\vec{v}_3=((R(O,120°)(\frac{\sqrt{8}}{3},0),\frac{1}{3});\vec{v}_4=((R(O,240°)(\frac{\sqrt{8}}{3},0),\frac{1}{3});$

$\vec{v}_5=-\vec{v}_1;\vec{v}_6=-\vec{v}_2;\vec{v}_7=-\vec{v}_3;\vec{v}_8=-\vec{v}_4.$

正八面體頂點坐標



(一)

$\vec{v}_1=(\sqrt{\frac{2}{3}},0,\sqrt{\frac{1}{3}}),\vec{v}_2=(R(O,120°)(\sqrt{\frac{2}{3}},0),\sqrt{\frac{1}{3}});\vec{v}_3=(R(O,240°)(\sqrt{\frac{2}{3}},0),\sqrt{\frac{1}{3}});$

$\vec{v}_4=-\vec{v}_1;\vec{v}_5=-\vec{v}_2;\vec{v}_6=-\vec{v}_3.$

(二)

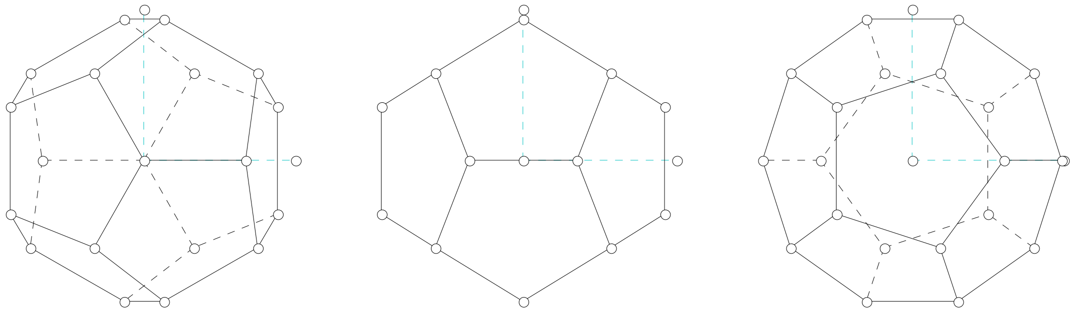
$\vec{v}_1=(\sqrt{\frac{1}{2}},0,\sqrt{\frac{1}{2}});\vec{v}_2=(-\sqrt{\frac{1}{2}},0,\sqrt{\frac{1}{2}});\vec{v}_3=(0,1,0);$

$\vec{v}_4=-\vec{v}_1;\vec{v}_5=-\vec{v}_2;\vec{v}_6=-\vec{v}_3.$

(三)

$\vec{v}_1=(1,0,0);\vec{v}_2=(0,1,0);\vec{v}_3=(0,0,1);\vec{v}_4=-\vec{v}_1;\vec{v}_5=-\vec{v}_2;\vec{v}_6=-\vec{v}_3.$

正十二面體的坐標



(一)

令$O=(0,0)$，$R(O,\theta)(a,b)=(a\cos\theta-b\sin\theta, a\sin\theta+b\cos\theta)$ 表繞O旋轉θ角度.

$v1=(0,0,1)$;

$v2=(\frac{2}{3},0,\frac{\sqrt{5}}{3})$; $v3=(R(O,120°)(\frac{2}{3},0),\frac{\sqrt{5}}{3})$; $v4=(R(O,240°)(\frac{2}{3},0),\frac{\sqrt{5}}{3})$;

$v5=(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6},\frac{1}{3})$; $v6=(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6},\frac{1}{3})$;

$v7=(R(O,120°)(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}),\frac{1}{3})$; $v8=(R(O,120°)(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}),\frac{1}{3})$;

$v9=(R(O,240°)(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}),\frac{1}{3})$; $v10=(R(O,240°)(-\frac{3+\sqrt{5}}{6},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}),\frac{1}{3})$;

$v11=-v1; v12=-v2; v13=-v3; v14=-v4; v15=-v5;$

$v16=-v6; v17=-v7; v18=-v8; v19=-v9; v20=-v10.$

(二)

$v1=(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6},0,\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6})$; $v2=(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6},0,\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6})$;

$v3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$; $v4=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$; $v5=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$; $v6=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$v7=(0,\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6})$; $v8=(0,-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6})$;

$v9=(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6},0)$; $v10=(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6},0)$;

$v11=-v1; v12=-v2; v13=-v3; v14=-v4; v15=-v5;$

$v16=-v6; v17=-v7; v18=-v8; v19=-v9; v20=-v10.$

(三)

令$r_1=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{15}}$， $c_1=\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}$， $r_2=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{15}}$， $c_2=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{15}}$

$v1=(r_1,0,c_1); v2=(R(O,72°)(r_1,0),c_1); v3=(R(O,144°)(r_1,0),c_1);$

$v4=(R(O,216°)(r_1,0),c_1); v5=(R(O,288°)(r_1,0),c_1);$

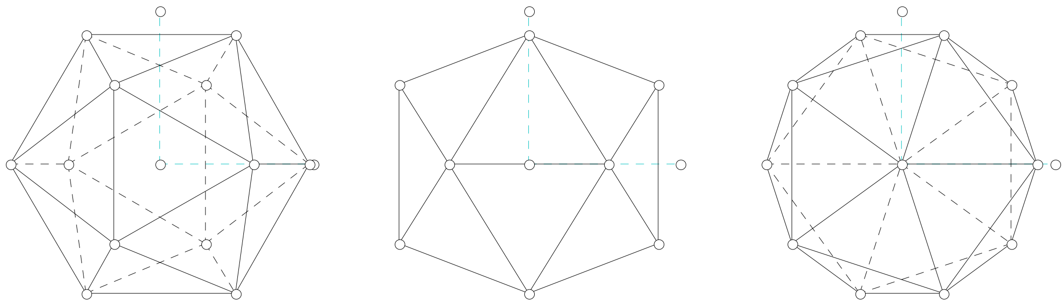
$v6=(r_2,0,c_2); v7=(R(O,72°)(r_2,0),c_2); v8=(R(O,144°)(r_2,0),c_2);$

$v9=(R(O,216°)(r_2,0),c_2); v10=(R(O,288°)(r_2,0),c_2);$

$v11=-v1; v12=-v2; v13=-v3; v14=-v4; v15=-v5;$

$v16=-v6; v17=-v7; v18=-v8; v19=-v9; v20=-v10.$

正二十面體頂點坐標



(一)

令$r_1=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{15}}$， $c_1=\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}$， $r_2=\sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{15}}$， $c_2=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{15}}$

$v1=(r_1,0,c_1); v2=(R(O,120°)(r_1,0),c_1); v3=(R(O,240°)(r_1,0),c_1);$

$v4=(R(O,60°)(r_2,0),c_2); v5=(R(O,180°)(r_2,0),c_2); v6=(R(O,300°)(r_2,0),c_2);$

$v7=-v1; v8=-v2; v9=-v3; v10=-v4; v11=-v5; v12=-v6.$

(二)

$v1=(\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}},0,\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}); v2=(-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}},0,\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}); v3=(0,\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}});$

$v4=(0,-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}); v5=(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}},0); v6=(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}},0);$

$v7=-v1; v8=-v2; v9=-v3; v10=-v4; v11=-v5; v12=-v6.$

(三)

$v1=(0,0,1); v2=(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0,\dfrac{1}{\sqrt{5}}); v3=(R(O,72°)(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0),\dfrac{1}{\sqrt{5}});$

$v4=(R(O,144°)(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0),\dfrac{1}{\sqrt{5}}); v5=(R(O,216°)(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0),\dfrac{1}{\sqrt{5}}); v6=(R(O,288°)(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0),\dfrac{1}{\sqrt{5}});$

$v7=-v1; v8=-v2; v9=-v3; v10=-v4; v11=-v5; v12=-v6.$

阿基米得多面體

陳創義

所謂**阿基米得多面體**，就是一凸多面體與球面拓樸同胚，且每一頂點所接的正多邊形面的種類及其面數皆相同。

設定下列符號：

v：代表多面體的頂點數。

e：代表多面體的邊數。

f：代表多面體的面數。

f_k：代表多面體的正 k 邊形面面數。

因為與球面拓樸同胚，則有尤拉公式

〈1〉 $$v - e + f = 2\ .$$

由符號的定義，我們有

〈2〉 $$f = \sum_{k=3}^{\infty} f_k \quad .$$

〈3〉 $$2e = \sum_{k=3}^{\infty} k \cdot f_k \quad .$$

且由於是凸多面體及每一面皆是正多邊形，所以每一頂點最多只能接五個面，最少接三個面。我們分成接三個面、接四個面、接五個面三種情形來討論。

(一) 接三個面：可設接正 n_1 , n_2, n_3 邊形，其中 $3 \le n_1 \le n_2 \le n_3$.，所以

$$\frac{(n_1-2)\times 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2-2)\times 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3-2)\times 180^\circ}{n_3} < 360^\circ$$

〈4〉 $$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}\ , \qquad 3 \le n_1 \le n_2 \le n_3\,.$$

且

〈5〉 $$3v = 2e\ .$$

則 n_1 可為 3 或 4 或 5 .

定理 A：每一頂點接三個面的阿基米得多面體，若三個面當中有一面的邊數為奇數時，則另兩面的邊數必相同。

証明：假設有一阿基米得多面體，每一頂點接正 k、m、n 邊形的面且 k 為奇數，取一正 k 邊形，令頂點依序為 $A_1,A_2,\ldots,A_k$，可設邊 $\overline{A_1A_2}$ 另一側接正 m 邊形，由於

點 A_2 已經接了正 k , m 邊形, 所以邊 $\overline{A_2A_3}$ 必接正 n 邊形, 同理可推得邊 $\overline{A_{k-1}A_k}$ 接正 n 邊形，邊 $\overline{A_kA_1}$ 接正 m 邊形，因此頂點 A_1 接了正 k , m , m 邊形，則 m = n .

(1)當 n_1= 5 時，由⟨4⟩知 n_2=5 , 6 .

(i)當 n_2= 5 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 5 .

(ii)當 n_2= 6 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 6 .

(2)當 n_1= 4 時，由⟨4⟩知 n_2=4 , 5 , 6 , 7 .

(i)當 n_2= 7 時，由⟨4⟩及定理 A 知 n_3 不存在。

(ii)當 n_2= 6 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 6 , 8 , 10 .

(iii)當 n_2= 5 時，由⟨4⟩及定理 A 知 n_3 不存在。

(iv)當 n_2= 4 時，由⟨4⟩及定理 A 得 $n_3\geq$ 4 .

(3)當 n_1= 3 時，由⟨4⟩及定理 A 知 n_2= 3 , 4 , 6 , 8 , 10 .

(i)當 n_2= 10 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 10 .

(ii)當 n_2= 8 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 8 .

(iii)當 n_2= 6 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 6 .

(iv)當 n_2= 4 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 4 .

(v)當 n_2= 3 時，由⟨4⟩及定理 A 得 n_3= 3 .

因此我們整理一下, 滿足⟨4⟩及定理 A 的 (n_1,n_2,n_3) 有 (3 , 3 , 3) , (4 , 4 , 4) , (5 , 5 , 5) , (5 , 6 , 6) , (4 , 6 , 10) , (4 , 6 , 8) , (4 , 6 , 6) , (4 ,4 , k);k > 4; (3 , 10 , 10) , (3 , 8 , 8) , (3 , 6 , 6) ,(3 , 4 , 4) .接下來試就上述各值, 計算各種正多邊形面的面數。我們以(n_1,n_2,n_3) 表示每一頂點皆接正 n_1,n_2,n_3 邊形的阿基米得多面體。將⟨4⟩式及⟨2⟩式代入⟨1⟩式得

⟨6⟩
$$-v + 2\sum_{k=3}^{\infty} f_k = 4 .$$

(1) (3 , 3 , 3) :因為每一頂點接三個正三邊形，所以有

$$3v = 3f_3$$

代入⟨6⟩,得 f_3= 4 . 此阿基米得多面體即為正四面體。

(2) (4 , 4 , 4) :因為每一頂點接三個正四邊形，所以有

$$3v = 4f_4$$

代入⟨6⟩,得 f_4= 6 . 此阿基米得多面體即為正六面體，也就是正立方體。

(3) (5 , 5 , 5) : 因為每一頂點接三個正五邊形，所以有

$$3v = 5f_5$$

代入⟨6⟩,得 f_5= 12 . 此阿基米得多面體即為正十二面體。

(4) (5 , 6 , 6) :因為每一頂點接一個正五邊形和兩個正六邊形，所以有

$$v = 5f_5 \quad , \quad 2v = 6f_6$$

分別代入⟨6⟩,得 f_5=12, f_6=20.

(5) (4 , 6 , 10) : 因為每一頂點接一個正四邊形、一個正六邊形和一個正十邊形，所以有

$$v = 4 f_4 , v = 6 f_6 , v = 10 f_{10}$$

分別代入⟨6⟩,得 f_4= 30 , f_6= 20 , f_{10}= 12 .

(6) (4 , 6 , 8) : 因為每一頂點接一個正四邊形、一個正六邊形和一個正八邊形，所以有

$$v = 4f_4 , v = 6f_6 , v = 8f_8$$

分別代入⟨6⟩,得 f_4= 12 , f_6= 8 , f_8= 6 .

(7) (4 , 6 , 6) :因為每一頂點接一個正四邊形和兩個正六邊形，所以有

$$v = 4f_4 \quad , \quad 2v = 6f_6$$

分別代入⟨6⟩,得 $f_4 = 6$, $f_6 = 8$.

(8) (4 , 4 , k) , k > 4 :因為每一頂點接一個正 k 邊形和兩個正四邊形，所以有

$$v = kf_k \quad , \quad 2v = 4f_4$$

分別代入⟨6⟩,得 $f_4 = k$, $f_k = 2$.

(9) (3 , 10 , 10) :因為每一頂點接一個正三角形和兩個正十邊形，所以有

$$v = 3f_3 \quad , \quad 2v = 10f_{10}$$

分別代入⟨6⟩,得 f_3= 20 , f_{10} = 12 .

(10) (3 , 8 , 8) :因為每一頂點接一個正三角形和兩個正八邊形，所以有

$$v = 3f_3 \quad , \quad 2v = 8f_8$$

分別代入⟨6⟩,得 f_3= 8 , f_8 = 6 .

(11) (3 , 6 , 6) :因為每一頂點接一個正三角形和兩個正六邊形，所以有

$$v = 3f_3 \quad , \quad 2v = 6f_6$$

分別代入⟨6⟩,得 f_3= 4 , f_6 = 4 .

(12) (3 , 4 , 4) :因為每一頂點接一個正三角形和兩個正四邊形，所以有

$$v = 3f_3 \quad , \quad 2v = 4f_4$$

分別代入⟨6⟩,得 f_3= 2 , f_4 = 3 .

(二)接四個面：可設接正 n_1, n_2, n_3, n_4 邊形，其中 $3 \le n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$.所以

$$\frac{(n_1-2)\times 180^\circ}{n_1}+\frac{(n_2-2)\times 180^\circ}{n_2}+\frac{(n_3-2)\times 180^\circ}{n_3}+\frac{(n_4-2)\times 180^\circ}{n_4}<360^\circ$$

〈7〉 $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}>1\ ,\ 3\le n_1\le n_2\le n_3\le n_4\,.$$

且

〈8〉 $$4v = 2e\,.$$

則 $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ 或 4 .

(1)當 $n_2 = 4$ 時，由〈7〉知 $n_3 = 4$, $n_4 = 4$ 或 5 .

(2)當 $n_2 = 3$ 時，由〈7〉知 $n_3 = 3$ 或 4 或 5 .

(i)當 $n_3 = 5$ 時，由〈7〉及下面的定理 B 知 $n_4 = 5$.

(ii)當 $n_3 = 4$ 時，由〈7〉及下面的定理 B 知 $n_4 = 4$.

(iii)當 $n_3 = 3$ 時，由〈7〉知 $n_4 \ge 3$.

定理 B :不存在每一頂點接四個面形式為(3 , 3 , 4 , k), k > 4 ;(3 , 3 , 5 , m), m > 5 的阿基米得多面體。

証明：(1) 假設有(3 , 3 , 4 , k), k > 4 ,型的阿基米得多面體。任取一正四邊形 ABCD . 若 AB , BC , CD , DA 四邊皆接三角形,令其分別為ΔABE , ΔBCG , ΔCDH , ΔDAI 則 BE , BG 必接一正 k 邊形且 GC , CH 也必接一正 k 邊形，因此頂點 G 接了兩個正 k 邊形，得到矛盾。所以 AB , BC , CD , DA 四邊至少有一邊不接三角形, 可令邊 AB 不接三角形，是接正 k 邊形，因此，頂點 A , B 各分別接了兩個三角形ΔADJ , ΔAJK 及ΔBCL , ΔBLM . 由於 J , L 已經接了兩個三角形, 所以邊 JD 及邊 LC 必接正 k 邊形，因此邊 CD 必接ΔCDN ,則邊 CN , DN 分別接正 k 邊形，那麼頂點 N 接了兩個正 k 邊形，矛盾。所以不存在(3 , 3 , 4 , k),k>4,型的阿基米得多面體。

(2) 假設有(3 , 3 , 5 , m), m > 5 ,型的阿基米得多面體。任取一正五邊形 ABCDE .同(1)前段的討論邊 AB , BC , CD , DE , EA 五邊至少有一邊不接三角形，可令邊 AB 不接三角形，是接正 m 邊形，因此，頂點 A , B 各分別接了兩個三角形ΔAEF , ΔAFG 及ΔBCH , ΔBHI .由於頂點 F , H 已經接了兩個三角形, 所以邊 CH , EF 只能再接正 m 邊形，因此，邊 CD , DE 只能接ΔCDJ , ΔDEK ,那麼邊 DJ , DK 要為正 m 邊形的邊，因此頂點 J , K 分別都接了兩個正 m 邊形，得到矛

盾，所以不存在(3 , 3 , 5 , m),m > 5,型的阿基米得多面體。

我們整理一下，滿足⟨7⟩及定理 B 的(n_1 ,n_2 ,n_3 ,n_4)有(3 , 3 , 3 , 3) , (3 , 4 , 4 , 5) , (3 , 4 , 4 , 4) ,(3 , 3 , 5 , 5) ,(3 , 3 , 4 , 4) ,(3 , 3 , 3 , k),k>4.接下來就上面各值，計算各種正多邊形的面數。將⟨8⟩式及⟨2⟩式代入⟨1⟩式得

⟨9⟩ $$-v + \sum_{k=3}^{\infty} f_k = 2 .$$

(1) (3 , 3 , 3 , 3)：因為每一頂點接四個正三角形，所以有

$$4v = 3f_3 .$$

代入⟨9⟩式得 $f_3= 8$.此阿基米得多面體即為正八面體。

(2) (3 , 4 , 4 , 5)：因為每一頂點接一個正三角形、兩個正四邊形及一個正五邊形，所以有

$$v = 3f_3 , \quad 2v = 4f_4 , v = 5f_5 .$$

分別代入⟨9⟩式得 $f_3= 20$, $f_4= 30$, $f_5= 12$.

(3) (3 , 4 , 4 , 4)：因為每一頂點接一個正三角形及三個正四邊形，所以有

$$v = 3f_3 , \quad 3v = 4f_4 .$$

分別代入⟨9⟩式得 $f_3= 8$, $f_4= 18$.

(4) (3 , 3 , 5 , 5)：因為每一頂點接兩個正三角形及兩個正五邊形，所以有

$$2v = 3f_3 , \quad 2v = 5f_5 .$$

分別代入⟨9⟩式得 $f_3= 20$, $f_5= 12$.

(5) (3 , 3 , 4 , 4)：因為每一頂點接兩個正三角形及兩個正四邊形，所以有

$$2v = 3f_3 , \quad 2v = 4f_4 .$$

分別代入⟨9⟩式得 $f_3= 8$, $f_4= 6$.

(6) (3 , 3 , 3 , k) ,k > 3：因為每一頂點接三個正三角形及一個正 k 邊形，所以有

$$3v = 3f_3 , \quad v = kf_k .$$

分別代入⟨9⟩式得 $f_3= 2k$, $f_k= 2$.

(三)接五個面：可設接正 n_1 ,n_2 ,n_3 ,n_4 ,n_5 邊形，其中 $3 \le n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le n_5$，所以

$$\frac{(n_1-2)\times 180^\circ}{n_1}+\frac{(n_2-2)\times 180^\circ}{n_2}+\frac{(n_3-2)\times 180^\circ}{n_3}+\frac{\left(n_4-2\right)\times 180^\circ}{n_4}+\frac{(n_5-2)\times 180^\circ}{n_5}<360^\circ$$

⟨10⟩ $$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}>\frac{3}{2} \ , 3\le n_1\le n_2\le n_3\le n_4\le n_5 .$$

且

〈11〉 $$5v = 2e .$$

則 $n_1= 3$, $n_2= 3$, $n_3= 3$, $n_4= 3$, $n_5= 3$ 或 4 或 5 .

我們整理一下，滿足〈10〉的$(n_1 ,n_2 ,n_3 ,n_4 ,n_5)$有(3 , 3 , 3 , 3 , 3) , (3 , 3 , 3 , 3 , 4) , (3 , 3 , 3 , 3 , 5) .就上述各值，計算各種正多邊形的面數，將〈11〉式及〈2〉式代入〈1〉式得

〈12〉 $$-3v + 2\sum_{k=3}^{\infty} f_k = 4 .$$

(1) (3 , 3 , 3 , 3 , 3)：因為每一頂點接五個正三角形，所以有

$$5v = 3f_3 .$$

代入〈12〉式得 $f_3= 20$.此阿基米得多面體即為正二十面體。

(2) (3 , 3 , 3 , 3 , 4)：因為每一頂點接四個正三角形及一個正四邊形，所以有

$$4v = 3f_3 , \quad v = 4f_4 .$$

分別代入〈12〉式得 $f_3= 32$, $f_4= 6$.

(3) (3 , 3 , 3 , 3 , 5)：因為每一頂點接四個正三角形及一個正五邊形，所以有

$$4v = 3f_3 , \quad v = 5f_5 .$$

分別代入〈12〉式得 $f_3= 80$, $f_5= 12$.

阿基米得多面體：

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	v	e	f
3	3	3			4	6	$f_3 = 4$　正四面體
4	4	4			8	12	$f_4 = 6$　正六面體
5	5	5			20	30	$f_5 = 12$　正十二面體
5	6	6			60	90	$f_5 = 12$　$f_6 = 20$
4	6	10			120	180	$f_4 = 30$　$f_6 = 20$　$f_{10} = 12$
4	6	8			48	72	$f_4 = 12$　$f_6 = 8$　$f_8 = 6$
4	6	6			24	36	$f_4 = 6$　$f_6 = 8$
4	4	k>4			2k	3k	$f_4 = k$　$f_k = 2$
3	10	10			60	90	$f_3 = 20$　$f_{10} = 12$
3	8	8			24	36	$f_3 = 8$　$f_8 = 6$
3	6	6			12	18	$f_3 = 4$　$f_6 = 4$
3	4	4			6	9	$f_3 = 2$　$f_4 = 3$
3	3	3	3		6	12	$f_3 = 8$　正八面體
3	4	4	5		60	120	$f_3 = 20$　$f_4 = 30$　$f_5 = 12$
3	4	4	4		24	48	$f_3 = 8$　$f_4 = 18$
3	3	5	5		30	60	$f_3 = 20$　$f_5 = 12$
3	3	4	4		12	24	$f_3 = 8$　$f_4 = 6$
3	3	3	k>3		2k	4k	$f_3 = 2k$　$f_k = 2$
3	3	3	3	3	12	30	$f_3 = 20$　正二十面體
3	3	3	3	4	24	60	$f_3 = 32$　$f_4 = 6$
3	3	3	3	5	60	150	$f_3 = 80$　$f_5 = 12$

多面體的合成與展開

國立台灣師範大學數學系　陳創義

要做多面體的展開與合成，要有三維活動標架的概念，也就是把一組三維的直角坐標系帶著走，如同一個人隨時以自我為中心，前後當作一個坐標軸，做又當一個座標軸，上下當一個座標軸，建立空間的座標系。多面體的展開與合成，就是面繞著稜來做旋轉，意即以稜為旋轉軸。因此，我們要在稜上取一點當作三維活動標架的中心，並取稜當作其中的一條座標軸，接下來就是取兩個與稜垂直的座標軸(例如：$\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ 為這兩座標軸的單位向量)。此時 $\cos\theta\ \mathbf{e}_1+\sin\theta\ \mathbf{e}_2$，$0\le\theta\le a$，表示 $\mathbf{e}_1$ 繞旋轉軸旋轉從 0 到 a 角度做變化。知道這樣的觀念之後，把這樣的三維活動標架中心移到展開圖中有兩個面相鄰的稜上，並一需要調整所要的兩個與稜垂直的座標軸及旋轉角度，所以多面體的二面角要先曉得，也就是相鄰兩個面的夾角。利用兩面的共同邊做旋轉軸，來旋轉到適當的角度，此時找兩個與旋轉軸垂直的兩個互相垂直的向量來控制轉角，θ範圍的兩端點就代表從何處轉到何處，當然也可在範圍中間做中途站。我們以正立方體為例子，正立方體的每個二面角都是 90°，為了可以做巨集及往後處理不同形狀的正多邊形面的緣故，我們選擇稜的中點當作控制旋轉的中心。

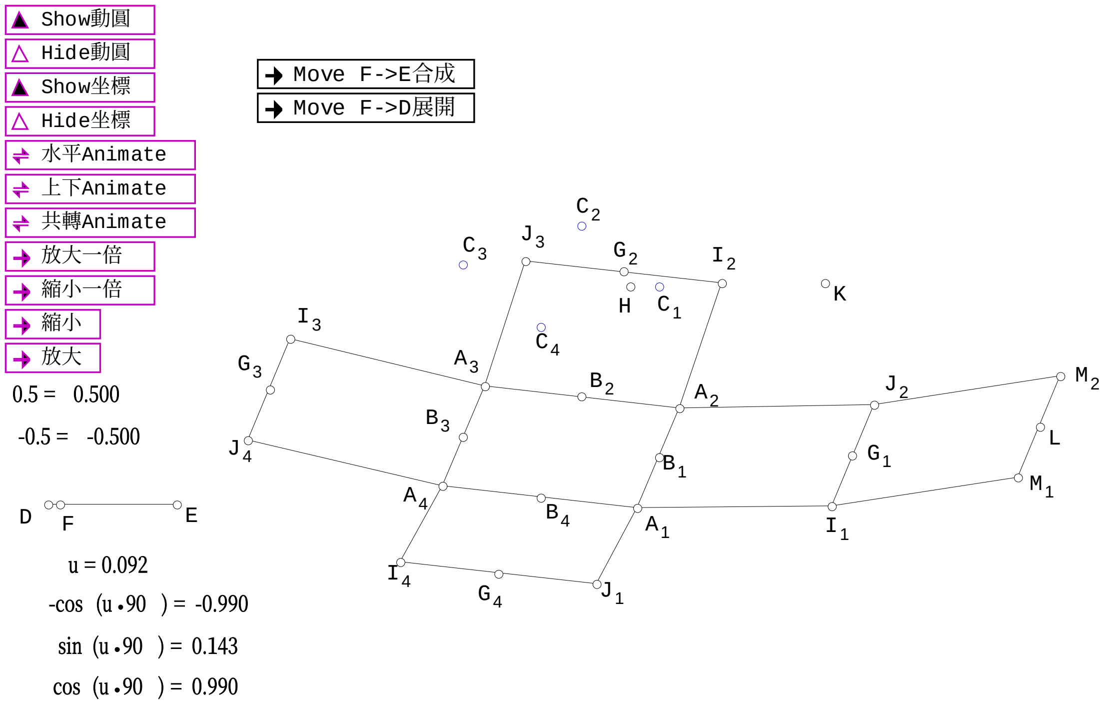
我們的做法如下：

1. 開啟三維直角坐標架(Tricoord.gsp 可在本人網頁下載並下載 2dplot.gss 及 3dplot.gss)，標架的原點 O，x,y,z 軸的單位點分別為 X,Y,Z。假設我們立方體的底面正方形頂點坐標為 $A_1(0.5,0.5,0),A_2(0.5,-0.5,0),A_3(-0.5,-0.5,0),A_4(-0.5,0.5,0)$，利用巨集 2dplot.gss 或 3dplot.gss 輸入，並將他們的邊用線段連上。
2. 造各邊 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 的中點 B_1、B_2、B_3、B_4。並將點 Z，分別以向量 OB_1、OB_2、OB_3、OB_4 做平移，產生點 C_1、C_2、C_3、C_4。[此時，B_1B_3、B_1C_1 為互相垂直的兩個向量並且垂直線段 A_1A_2。其餘相同。]
3. 畫一線段 DE，並在此線段取一點 F，測量比值 u=DF/DE。[此時，u 從 0 變動到 1。]
4. 計算[m1]=-cos(u*90°), [m2]=sin(u*90°), [m3]=cos(u*90°)。[此時的90°是二面角的補角角度，v 從 0°到 90°變動]

5. 開啟 2dplot.gss 巨集，依序點選點 B_3、點 B_1、[m1]、點 C_1、[m2]，產生點 G_1；再依序點選點 B_4、點 B_2、[m1]、點 C_2、[m2]，產生點 G_2；再依序點選點 B_1、點 B_3、[m1]、點 C_3、[m2]，產生點 G_3；再依序點選點 B_2、點 B_4、[m1]、點 C_4、[m2]，產生點 G_4；並依序點選點 B_3、點 B_1、[m2]、點 C_1、[m3]，產生點 H。
6. 以平移向量 B_1G_1，將點 A_1、點 A_2 做平移產生點 I_1、J_2，並畫線段 A_1I_1、A_2J_2、

I_1J_2；同樣，再以平移向量 B_2G_2，將點 A_2、點 A_3 做平移產生點 I_2、J_3，並畫線段 A_2I_2、A_3J_3、I_2J_3；再以平移向量 B_3G_3，將點 A_3、點 A_4 做平移產生點 I_3、J_4，並畫線段 A_3I_3、A_4J_4、I_3J_4；再以平移向量 B_4G_4，將點 A_4、點 A_1 做平移產生點 I_4、J_1，並畫線段 A_4I_4、A_1J_1、I_4J_1。

7. 以平移向量 B_1G_1 做平移，將點 H 平移產生點 K，再開啟巨集 2dplot.gss，依序點選點 B_1、點 K、[m1]、點 L、[m2]，產生點 L，以向量 G_1L 做平移，將點 I_1、J_2 做平移，產生點 M_1、M_2，並畫線段 I_1M_1、J_2M_2、M_1M_2。
8. 依序選取點 F、點 E，做 MOVE，產生合成立方體按鈕；依序選取點 F、點 D，做 MOVE，產生立方體展開按鈕。



9. 再將一些不想呈現的點及物件隱藏，完成立方體的合成與展開。